Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

Matemática I (Cód. 175-176-177)

Cód. Carrera: 126 -236-280-508-521

542-610-611-612-613

Fecha: 14–06–2014

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 7 al 11.

OBJ 7 PTA 1 Calcula el $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n+2}{4n^4-5}$ **.**

SOLUCIÓN:

Dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de n; $\mathbf{n^4}$ y aplicamos el álgebra de límites se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n+2}{4n^4-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n^3}{n^4}-\dfrac{3n}{n^4}+\dfrac{2}{n^4}}{\dfrac{4n^4}{n^4}-\dfrac{5}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}{4-\dfrac{5}{n^4}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^4}}{4-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^4}} = \frac{0-0+0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

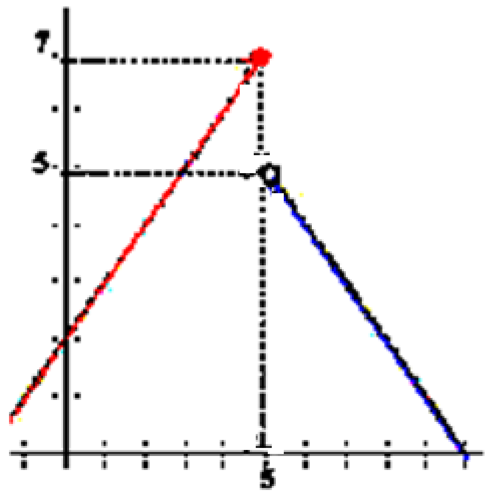
Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-3n+2}{4n^4-5} = \boxed{0}.$$

♦

OBJ 8 PTA 2 A continuación se te presenta una gráfica de una función y un listado de enunciados incompletos. Completa los espacios en blancos de dichos enunciados para que sean correctos.

Dada la gráfica de la siguiente función $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 5 \\ -x+10 & x>5 \end{cases}$, se puede decir que:



a. El punto $(\_\_\_ \;,\; \_\_\_)$ no pertenece a la gráfica de f.

b. Los límites laterales son: $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$ _________ y $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$ _________.

c. Finalmente, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ _________

Nota: Para el logro de este objetivo debes responder correctamente **dos** literales.

SOLUCIÓN:

Ver los ejemplos en las páginas 74 y 89, Módulo III del texto.

a. El punto $(\underline{5} \;,\; \underline{5})$ **no** pertenece a la gráfica de f.

b. Los límites laterales son: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \underline{\mathbf{7}}$ y $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \underline{\mathbf{5}}$**.**

c. Finalmente, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **<u>no existe.</u>**

♦

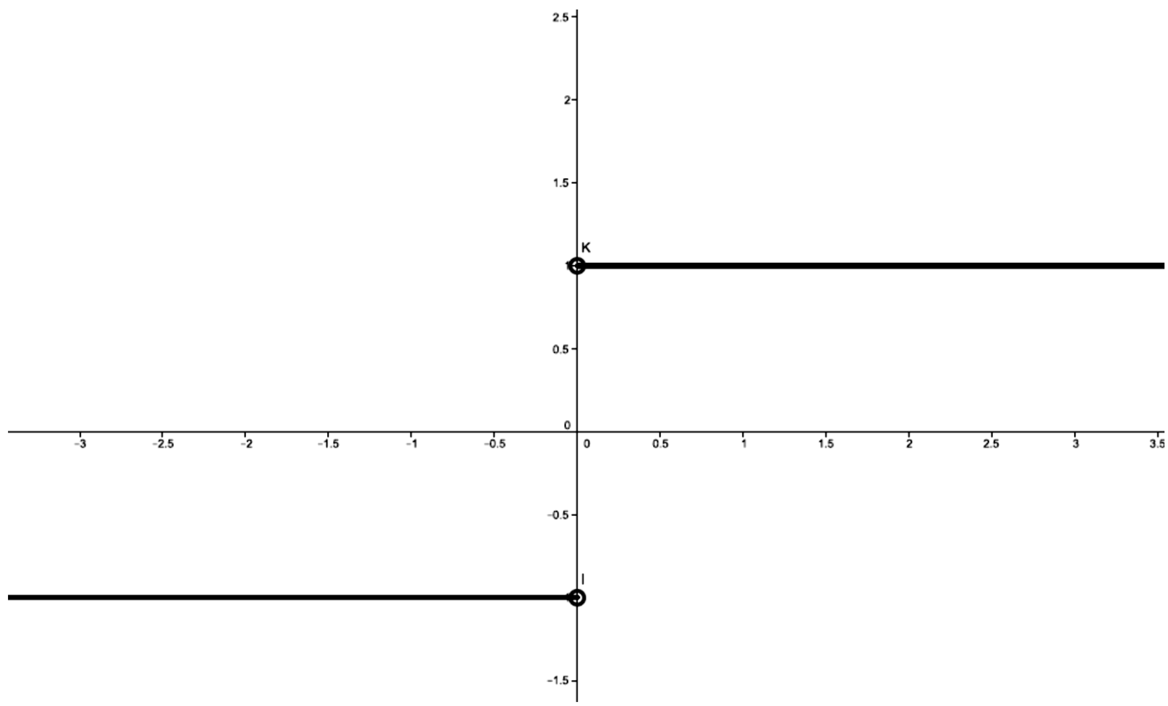
OBJ 9 PTA 3 Dada la función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, represente su gráfica, responda y justifique a la pregunta: ¿Tiene la función f una raíz en el intervalo $[-1,1]$?

Nota: Para el logro del objetivo debe responder correctamente ambas partes de la pregunta.

SOLUCIÓN:

La función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, esto es: $f(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}$.

La representación de su gráfica es:



Según el teorema de Bolzano (ver página 148. Módulo III. Matemática I), tenemos:

a. f **no es continua** en el punto $x_0 = 0 \notin (-1,1)$

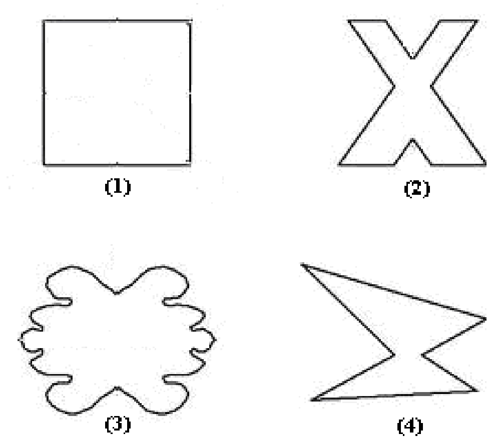
b. f toma valores de signo contrarios en los extremos del intervalo.

De las partes **a** y **b** se concluye que f **NO tiene una raíz en el intervalo $[-1,1]$.**

♦

EDUCACION, MENCION DIFICULTAD DE APRENDIZAJE Y PREESCOLAR CÓD. 175

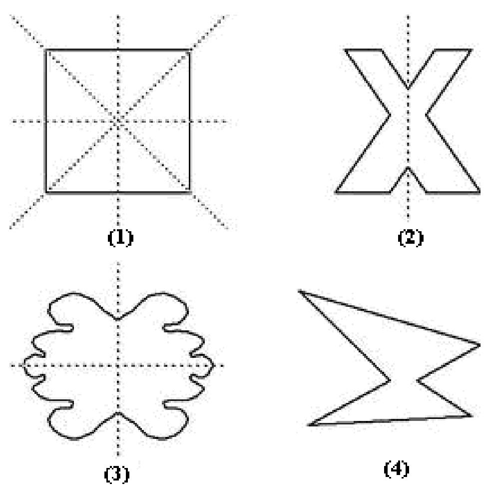
OBJ 10 PTA 4 Dadas las siguientes figuras encuentre los ejes de simetría y responda a lo siguiente:



a. ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) figura(s) no posee ejes de simetría?
b. ¿Cuántos ejes de simetría posee cada figura? y explique porqué.
c. Represente gráficamente los ejes de simetría de las figuras que la poseen.

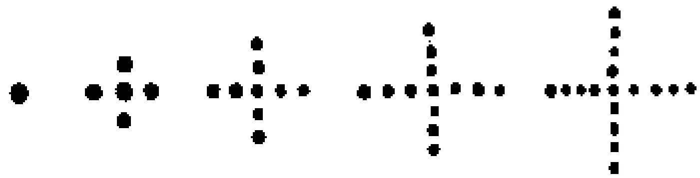
Nota: Para el logro del objetivo debe responder correctamente todas las partes de la pregunta.

SOLUCIÓN:
(Ver páginas 99 -111 del Módulo IV (175))
a. La única figura que no posee ejes de simetría es la figura número 4.
b. En las figuras (1), (2) y (3) se pueden observar simetrías bilaterales o de reflexión dados por los siguientes ejes de simetría: Para la figura (1) hay 4 ejes, en la figura (2) hay un solo eje vertical y en la figura (3) hay dos ejes (el vertical y el horizontal).
c. En las figuras se señalan los ejes de simetría de las figuras que las tienen:



♦

OBJ 11 PTA 5 Dada la siguiente seriación o sucesión de conjuntos de puntos



Define dicho conjunto de puntos mediante una función $\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con la definición de **seriación o sucesión** dada en la página 137, del Módulo IV (Cód.175) del texto, se puede definir la seriación o sucesión de objetos como:

E es el conjunto de los conjuntos distintos de puntos que aparecen en el enunciado: un punto, cinco puntos, nueve puntos, trece puntos y diecisiete puntos, que se denotan por la lista de términos de una sucesión dados por: $1,5,9,13,17,\ldots$

Se tiene: $f(0)=1;\ f(1)=5;\ f(2)=9;\ f(3)=13;\ f(4)=17,\ldots$

Si se quiere utilizar la notación $\{a_n\}$, se tiene: $a_n = 4n+1,\quad n \geq 0.$

♦

ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA CÓD. 176

OBJ 10 PTA 4 Sean $V_t^A = 150000 - 10000t$ y $V_t^B = 130000 - 8000\,t$ las funciones de valor correspondientes a los bienes A y B respectivamente.

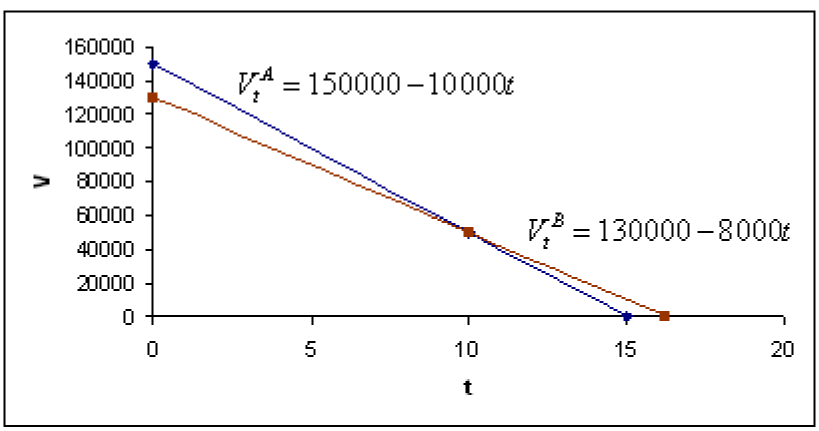
a. Represente la gráfica de las funciones anteriores.
b. Obtenga la velocidad de depreciación de dichos bienes.
c. Obtenga el tiempo transcurrido desde la compra hasta que los valores de los bienes se igualen.

Nota: Para el logro de este objetivo debe responder correctamente todos los literales.

SOLUCIÓN:

Se procede como en el problema 1.13.2 de la página 67, Módulo IV, Matemática I.

a. La representación gráfica de las funciones anteriores es:



b. La velocidad de depreciación del bien A es de Bs. 10000/año, mientras que la del bien B es Bs. 8000/año.

c. Lo que se quiere encontrar es el tiempo t en años, tales que: $V_t^A = V_t^B$, esto es: $V_t^A = V_t^B \Rightarrow 150000 - 10000t = 130000 - 8000t \Rightarrow t = 10$.

Es decir, el valor de los bienes es el mismo, luego que se hayan transcurridos 10 años.

♦

OBJ 11 PTA 5 Una persona compra un bien en Bs. 400 000 y éste se deprecia durante los primeros 9 años, en forma exponencial, hasta alcanzar un valor de rescate de Bs. 150 000 para el último año. Obtenga:

a. La función V= V(t) que muestra el valor del bien al final del año t.
b. La representación gráfica de la función anterior.
c. El valor del bien cuando haya transcurrido 6 años.

Nota: Para el logro de este objetivo debe responder correctamente todos los literales.

SOLUCIÓN: (ver p.98 del Módulo IV (Cód. 176))

a. La función V= V(t) que muestra el valor del bien al final del año t es de tipo exponencial en este caso, es decir, esta tiene la forma:

$$V_t = \alpha\, e^{-\beta t}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ t \in [0,9],$$

Por consideraciones del problema: $V(0) = 400000$ y $V(9) = 150000$, por lo tanto:

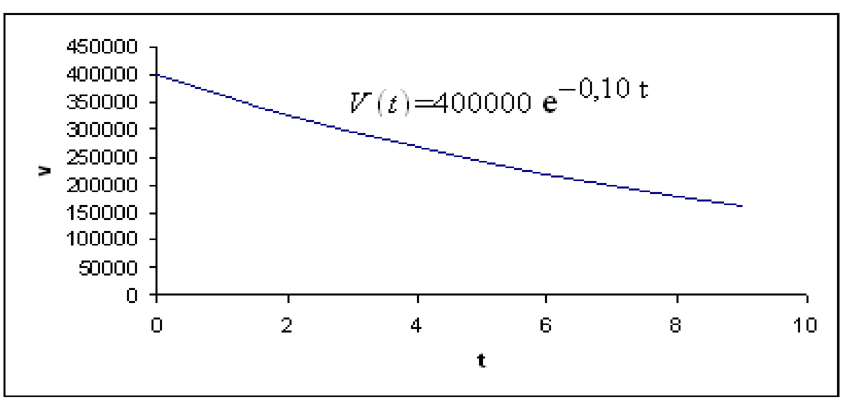
$$\alpha = 400000$$

$$\alpha\, e^{-\beta (9)} = 150000$$

$$\Rightarrow 400000\, e^{-(9)\beta} = 150000 \Rightarrow \beta = -\frac{Ln\dfrac{150000}{400000}}{9} \approx 0{,}10$$

$$\Rightarrow V = V(t) = 400000\, e^{-0{,}10\, t}, \ , t \in [0,9]$$

b. La representación gráfica de la función anterior se muestra en la siguiente figura:



c. El valor del bien cuando haya transcurrido 6 años es:

$$V(6) = 400000\ e^{-0{,}10\ (6)} \approx 219525.$$

♦

MATEMÁTICA, EDUCACIÓN MENCIÓN MATEMÁTICA INGENIERÍA CÓD. 177

OBJ 10 PTA 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con números reales, utilizando una demostración por agotamiento de casos, analizando las dos situaciones que se presentan, según si y = 0 o y ≠ 0.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases}.$$

SOLUCIÓN:

Caso 1: y = 0.

El sistema de ecuaciones se transforma:

$$\begin{cases} x^2 = x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ahora, resolviendo la ecuación $x^2 = x$, tenemos:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\,(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1.$$

Por lo tanto, hay dos soluciones que resuelven el sistema:

$$x = 0,\quad y = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1,\quad y = 0.$$

Caso 2: y ≠ 0.

En la ecuación $2xy = -y$ se puede simplificar por y, resultando $3x = -1$, luego $x = -\frac{1}{3}$. Al sustituir este valor en la primera ecuación del sistema, obtenemos:

$$\frac{1}{9} - y^2 = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto,

$$y = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{y así} \quad y = \pm\frac{2}{3}.$$

Luego, en este caso también tenemos dos soluciones:

$$x = -\frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{3},\ y = -\frac{2}{3}.$$

En total, hay cuatro posible soluciones del sistema propuesto.

♦

OBJ 11 PTA 5 Una fábrica produce aparatos de dos tipos, manual y eléctrico. Para la elaboración de éstos son necesarias 2 máquinas A y B. La construcción del aparato manual requiere utilizar durante 2 y 1 horas las máquinas A y B respectivamente, mientras que para producir uno eléctrico deben usarse A y B durante 2 y 3 horas respectivamente. Si se pretende vender un mínimo de 7 equipos manuales por cada 10 eléctricos, plantee la solución gráfica que satisfaga las necesidades de producción requerida e intérprete los resultados.

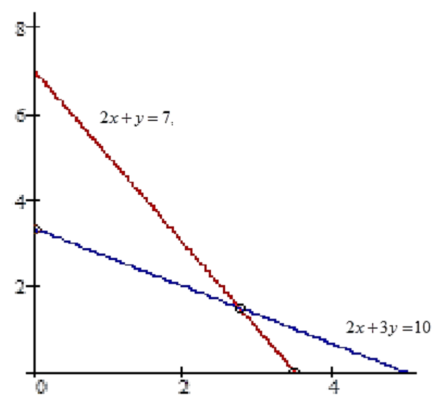
SOLUCIÓN:
Este problema se resuelve en forma similar a la parte a del problema 3 de la Autoevaluación V Parte II., en la página 124 del Módulo IV (Cód. 177) del Texto.
En el siguiente cuadro se presenta la información disponible:

	Máquina A	**Máquina B**	**VENTA**
Manual	2	1	7
Eléctrico	2	3	10

Denotemos por:
x el número de aparatos manuales producidos en las cantidades requeridas.
y el número de aparatos eléctricos producidos en las cantidades requeridas.
Por lo tanto, se trata de resolver un sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 7 \\ 2x + 3y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \in N, \quad y \in N \end{cases}$$

Gráficamente podemos representar las rectas de ecuaciones:
$2x + y = 7,\ 2x + 3y = 10$



La solución del problema está dada por aquellos puntos interiores al polígono de vértices $\left(\frac{11}{4}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ y sus bordes con ambas coordenadas enteras. ♦

FIN DEL MODELO.