Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

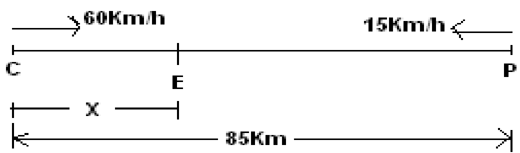
Matemática I (Cód. 175-176-177)

Cód. Carrera: 126-236-280-508-521
542-610-612-613

Fecha: 26 – 07 – 2014

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 11.

OBJ 1 PTA 1 Córdoba (C) dista de Pozoblanco (P) 85 Km. A las doce sale desde Córdoba un automóvil a 60 Km/h y en el mismo instante sale desde Pozoblanco un camión a 15 Km/h. Si en la siguiente representación gráfica se denota el punto de cruce (E) como:



¿En cuánto tiempo se cruzan?

Nota: Realice los cálculos con dos cifras decimales y no use redondeo.

SOLUCIÓN:

Se resuelve como en el ejercicio propuesto Nro. 4 de la sección 1.8.1 de la Pág. 90 del Módulo I.

Si denotamos por **x** al recorrido por el coche que sale de Córdoba y **t** (horas) el instante de tiempo desde que ambos salen desde sus puntos de partida. Entonces,

el recorrido por el automóvil que sale de Córdoba, durante el tiempo t son respectivamente:

$x = 60km/h \;\; , \;\; (t)h = 60tkm$.

El recorrido por el camión que sale de Pozoblanco, durante el tiempo t son respectivamente:

$x = 15km/h \;\; , \;\; (t)h = 15tkm$.

En el momento en que ambos se cruzan en el punto E, la distancia recorrida por el camión debe ser $85km - x$ (para que la suma de las dos distancias x y $85km - x$ sean $85km$). Luego, sin tomar las unidades: $85 - x = 15t$, de donde: $85 - 60t = 15t$.

De esta última ecuación se despeja el tiempo **t:**

$$85 - 60t = 15t$$

$$85 = 15t + 60t$$

$$85 = 75t$$

$$\frac{85}{75} = t$$

$$t \approx 1,13$$

Por lo tanto, El cruce ocurre en **una hora y 13 minutos** aproximadamente.

♦

OBJ 2 PTA 2 Al calcular $\dfrac{\left(\sqrt{2}+2^{-1/2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-2^{-1/2}\right)^2}$ se obtiene como resultado:

a. $9\sqrt{2}$ b. $8\sqrt{2}$ c. 9 d. $2\sqrt{2}$.

Sugerencia: Utilice, $(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$.

SOLUCIÓN:

Utilicemos la propiedad distributiva de los números reales (Ver página 111, Unidad 2, Módulo I del texto), donde se obtiene el producto notable:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2. \ [*] \ .$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2. \ [*] \ .$$

Sean a = $2^{1/2} + 2^{-1/2}$ y b = $2^{1/2} - 2^{-1/2}$. Entonces, sustituyendo a y b en [*] resulta:

$$\frac{\left(\sqrt{2}+2^{-1/2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-2^{-1/2}\right)^2} = \frac{\left(2^{1/2}+2^{-1/2}\right)^2}{\left(2^{1/2}-2^{-1/2}\right)^2} = \frac{\left(2+2.2^0+2^{-1}\right)}{\left(2-2.2^0+2^{-1}\right)} = \frac{\left(2+2+2^{-1}\right)}{\left(2-2+2^{-1}\right)} = \frac{\left(4+2^{-1}\right)}{2^{-1}} = 4.2+1 \ \ =9$$

Hemos visto que desarrollando los productos notables en $\dfrac{\left(\sqrt{2}+2^{-1/2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-2^{-1/2}\right)^2}$ se obtiene como solución **9**.

Por lo tanto, la opción correcta es la **c**.

♦

OBJ 3 PTA 3 Demuestra que: si $x < y$, entonces $x < \dfrac{x+y}{2} < y$, (Propiedad de la media aritmética de dos números x, y).

SOLUCIÓN:

Ver esta demostración en la Pág. 132 de la Unidad 3 del Módulo I del texto.

♦

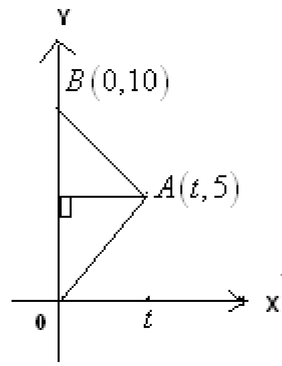
OBJ 4 PTA 4 Un triángulo isósceles tiene dos vértices en los puntos O(0, 0) y B(0 ,10). Al dibujar el triángulo isósceles se verifica que las coordenadas del otro vértice A(x , y) que tiene una distancia con el punto B de $5\sqrt{2}$ y que está situado en el primer cuadrante es:

a. $A\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ b. $A(10,5)$ c. $A(5,10)$ d. $A(5,5)$

Sugerencia: Suponga que en este triángulo isósceles los segmentos $\overline{BA}=\overline{OA}=5\sqrt{2}$.

SOLUCIÓN:

Se resuelve como el ejercicio 4.2.3.4 en la Pág. 48 de la Unidad 4 del texto.



La ordenada del punto medio del segmento $\overline{OB}$, donde O(0, 0) y B(0 ,10) es igual a: $\frac{0+10}{2}=\frac{10}{2}=5$.

Luego, $A(x,5)$.

Debemos calcular $x>0$. Ahora, por ser el triángulo isósceles se tiene que los segmentos $\overline{BA}=\overline{OA}=5\sqrt{2}$. De este último resultado se tiene que:

$$\sqrt{x^2+5^2}=5\sqrt{2}$$
$$\sqrt{x^2+25}=25.2$$
$$x^2+25=50$$
$$x^2=50-25$$
$$x^2=25$$
$$x=5$$

Luego, la opción correcta es la **d:** $A(5,5)$ ♦

OBJ 5 PTA 5 Consideremos la función g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 5(x-4)^2 - 2$:

a) Determina cuatro funciones f, h, n, m tales que, $g = n.f \circ h - m$

b) Dibuja la gráfica de g a partir de las gráfica de una función que conoces.

Nota: Para el logro de este objetivo debes responder correctamente ambos literales**.**

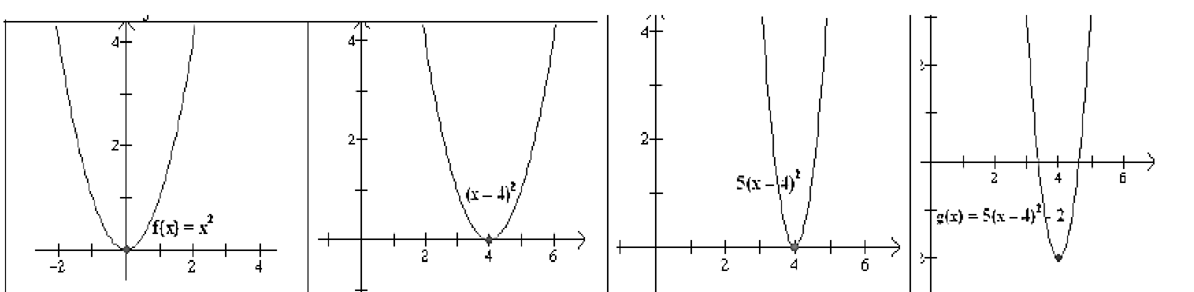
SOLUCIÓN:
Se resuelve como en el ejercicio Nro. 2 de la Autoevaluación Parte II en la Pág. 161 del Módulo II

a) Definimos las funciones f, h, n, m mediante:
$f(x) = x^2$, $h(x) = x-4$, $n(x) = 5$, $m(x) = 2$.

Se puede comprobar que $g = n.f \circ h - m$ en tres pasos a partir de la función $f(x) = x^2$, en efecto:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{Paso 1}} (x-4)^2 \xrightarrow{\text{Paso 2}} 5\,(x-4)^2 \xrightarrow{\text{Paso 3}} 5(x-4)^2 - 2 = g(x)$$

b) La gráfica de g es el resultado de hacer los siguientes pasos:
En el primer Paso traslada la gráfica de f horizontalmente 4 unidades hacia la derecha; el Paso 2, alarga verticalmente la función desde el eje x por un factor de 5; el Paso 3 traslada a la función resultante 2 unidades hacia abajo. Los pasos gráficos y la gráfica de g se muestran abajo.



$f(x) = x^2$	Paso 1	Paso 2	Paso 3

♦

OBJ 6 PTA 6 Se realizó un estudio para determinar los efectos de la falta de sueño en la habilidad de las personas para resolver problemas elementales de aritmética. 20 personas participan en el estudio. Estas permanecieron sin dormir 20 horas y después de este periodo debían resolver un conjunto de ejercicios. En la siguiente tabla se muestra el número de errores cometidos por cada persona

Intervalos de clases (Horas sin dormir)	**Frecuencia (Errores)**
[5,8]	7
(8,11]	5
(11,14]	3
(14,17]	2
(17,20]	1

Si se toma la frecuencia de esta tabla, ¿cuáles son los datos a representar, usando una escala aritmética de longitud m = 12 cm?

SOLUCIÓN:

Se resuelve como el ejemplo 6.5.1 en la pág. 205 del Módulo II de Matemática I.

Al ordenar los datos tenemos: $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 5$, $w_5 = 7$.

Entonces,

$$M = \frac{m}{w_n - w_1} = \frac{12}{7-1} = 2 . \qquad [1]$$

La ecuación de escala es:

$$x_i = 2\,(w_i - 1).$$

Así resultan los puntos:

$$x_1 = 2\,(1 - 1) = 0 \qquad x_2 = 2(2 - 1) = 2$$
$$x_3 = 2\,(3 - 1) = 4 \qquad x_4 = 2\,(5 - 1) = 8$$
$$x_5 = 2\,(7 - 1) = 12.$$

Luego, al punto:

$w_1 = 1$ se le asigna el punto $x_1 = 0$

$w_2 = 2$ se le asigna el punto $x_2 = 2$

$w_3 = 3$ se le asigna el punto $x_3 = 4$

$w_4 = 5$ se le asigna el punto $x_4 = 8$

$w_5 = 7$ se le asigna el punto $x_5 = 12$

♦

OBJ 7 PTA 7 Un estudiante cursante del primer semestre en la UNA se propone el día 1 de septiembre repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

a. ¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de septiembre?
b. ¿Cuántos ejercicios hará en total?

Nota: Para el logro del ejercicio debe responder correctamente ambos literales.

SOLUCIÓN:

Para responder ésta pregunta puede ver las páginas 26-28 del Módulo III.

Se trata de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $r = 2$.

a) $a_{15} = a_1 + (15-1).r = a_1 + 14.r = 1 + 28 = 29$ ejercicios

b) $S_{15} = \dfrac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \dfrac{(1+29) \cdot 15}{2} = 225$ ejercicios

♦

OBJ 8 PTA 8 Si $x+1 \neq 0$, entonces el cálculo del $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ es igual a:

a. -2 b. $+\infty$ c. 2 d. $\dfrac{1}{2}$

SOLUCIÓN:

De acuerdo a la indicación dada en la página 98, en el Módulo III del texto, se tiene:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2}{1} = -2 .$$

Por lo tanto, la opción correcta es la a.

♦

OBJ 9 PTA 9 Sea $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una función tal que, $f(x) = x^2 - 2$. ¿Tiene la función f al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$?

Sugerencia: Utilice el teorema de Bolzano para garantizar que la función dada tiene al menos una raíz en el intervalo indicado.

SOLUCIÓN:

1-Se estudia la continuidad en $[1,2]$:

Como $f(x) = x^2 - 2$, f es continua en cualquier intervalo, por ser una función polinómica.

2-Se estudia el signo:

$f(1) = (1)^2 - 2 = -1$ *Signo negativo*

$f(2) = (2)^2 - 2 = 2$ *Signo positivo*

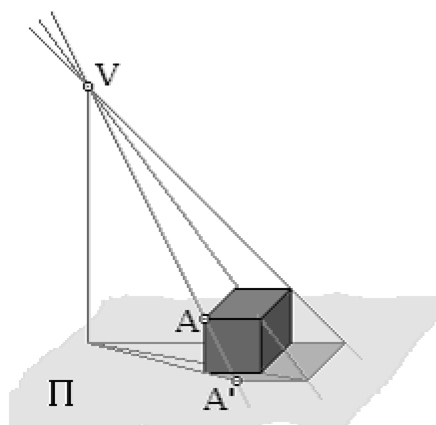
Luego, $Signo\ f(1) \neq Signo\ f(2)$.

Por lo tanto, existe al menos un punto $c \in (1,2)$ con $f(c) = 0$, es decir, la función tiene una raíz entre 1 y 2.

♦

EDUCACION, MENCION DIFICULTAD DE APRENDIZAJE Y PREESCOLAR (CÓD. 175)

OBJ 10 PTA 10 Se Considera un cubo y la proyección desde V que une los puntos de A con V, como se muestra en el dibujo.



¿Qué tipo de proyección se presenta sobre el plano Π?

SOLUCIÓN:

Ver páginas 56 -60 del Módulo IV (175)

Según la proyección presentada en la página 59 del Módulo IV (175), se está en presencia de una **proyección central o perspectiva central desde V.**

♦

OBJ 11 PTA 11 Para cada número $n \in \mathbb{N}$, se define la sucesión $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = 4n + 1$. Determine los cinco primeros términos de esa sucesión.

SOLUCIÓN:
De acuerdo con la definición de seriación o sucesión dada en la página 137, del Módulo IV (175) del Texto UNA, se pueden mostrar la siguiente lista de valores correspondientes a los cinco primeros términos de la sucesión dados por: $f(0) = 1$; $f(1) = 5$; $f(2) = 9$; $f(3) = 13$; $f(4) = 17$

Es decir, los cinco primeros términos de esa sucesión son: 1, 5, 9, 13 y 17.

♦

ADMINISTRACIÓN, CONTADURÍA, DE EMPRESAS Y RIESGOS Y SEGUROS (CÓD 176)

OBJ 10 PTA 10 Las funciones de costo e ingreso asociadas a un proceso de producción de un determinado bien son:

C = 150 000 + 60Q
I = 120Q

a) Obtenga la función de beneficio.
b) Representa gráficamente las funciones de costo, ingreso y beneficio en los mismos ejes de coordenada. , si las cantidades de producción $Q \in [0, 3000]$.

Nota: Para el logro de este objetivo debe responder correctamente ambos literales.

SOLUCIÓN:
Ver ejercicio propuesto 1.10 partes (a) y (b), en la página 57, del Módulo IV (176) del texto.
a) Ver páginas 48-53 del Módulo IV (176).

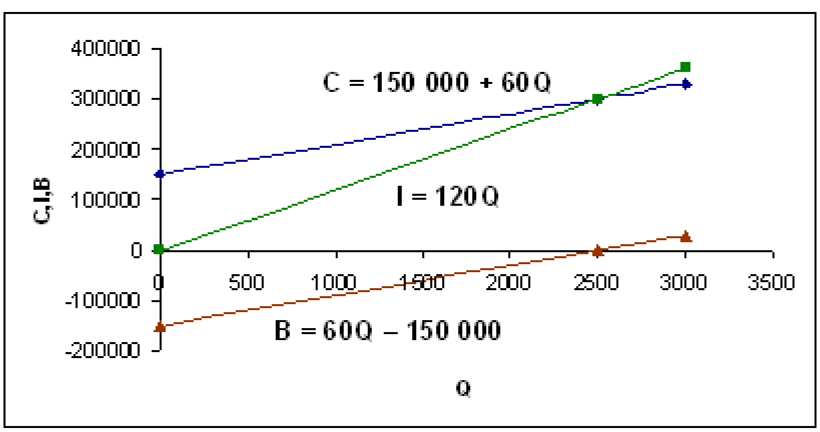
La función beneficio está dada por la relación B = I – C. Entonces,

B = I – 150 000 – 60Q = 120Q – 150 000 – 60Q = 60Q – 150 000.

Es decir, B = 60Q – 150 000.

b) La representación gráfica de las funciones de costo, ingreso y beneficio en los mismos ejes de coordenada es:

C = 150 000 + 60Q
I = 120Q
B = 60Q – 150 000



♦

OBJ 11 PTA 11 Si las ecuaciones de la demanda y de la oferta de un cierto bien son:

$$P = 18 - Q^2,\ Q \geq 0\ ,\ P = S^2,\ S \geq 0$$

Obtenga:

a) Las coordenadas del punto de equilibrio.

b) ¿Qué efecto tiene sobre el precio y la cantidad de equilibrio del bien, la decisión del gobierno de cobrar un impuesto de Bs. 5 Por unidad vendida?

Nota: Para el logro de este objetivo debe responder correctamente ambos literales.

SOLUCIÓN:

Ver p.111 del Módulo IV (176)

a) Las coordenadas del punto de equilibrio, se da cuando $Q = S$; en este caso, esta igualdad adopta la forma:

$$Q = \sqrt{18 - P}$$
$$S = \sqrt{P}$$
$$Q = S \Rightarrow \sqrt{18 - P} = \sqrt{P} \Rightarrow P = 9.$$

La cantidad de equilibrio es entonces:

$Q = S = \sqrt{9} = 3.$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de equilibrio son: $(Q, P) = (3, 9)$.

b) La decisión del gobierno de cobrar un impuesto de Bs. 5 Por unidad vendida, hace que la curva de la oferta sufra una traslación vertical de 5 unidades en relación a la curva original.

♦

INGENIERIA, MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN MENCIÓN MATEMÁTICA (CÓD. 177)

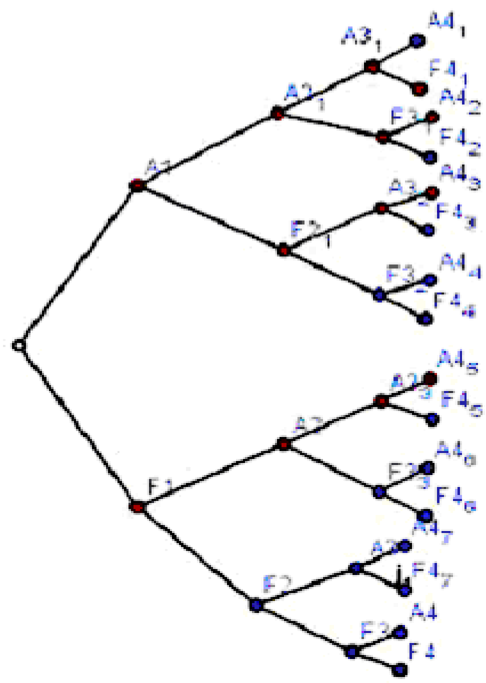
OBJ 10 PTA 10 Un jugador de fútbol debe anotar tres penaltis y sólo puede fallar un penalti de las cuatro oportunidades de lanzamientos hacia la arquería en un juego crucial para su clasificación en un equipo.

a) Utilice un diagrama de árbol para representar los posibles resultados de los cuatro lanzamientos de jugador a la arquería.

b) Determine el número de caminos en el diagrama de árbol, en los cuales el jugador de fútbol anota tres penaltis y sólo falla un penalti en el juego, es decir, en los cuales el jugador clasifica en el equipo.

SOLUCIÓN:

a) Hagamos el diagrama de árbol para visualizar todos los resultados posibles para este caso. Para ello, designemos por A y F si el jugador anota y falla el penalti en cada una de las cuatro oportunidades de lanzamiento hacia la arquería en el juego. De esta manera se construye el siguiente diagrama de árbol:



b) En el diagrama de árbol se observa que hay cuatro caminos (marcados en con puntos rojos) en los que el jugador acierta tres y falla uno de los penaltis en el juego.

♦

OBJ 11 PTA 11 Supongamos que tenemos un conjunto de datos recabados en la observación de un experimento, con las relaciones que se indican en la siguiente tabla:

Tiempo	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Observación	y_1	$y_2 = 1{,}2\, y_1$	$y_3 = 1{,}2\, y_2$	$y_4 = 1{,}2\, y_3$	$y_5 = 1{,}2\, y_4$

¿Qué Modelo Matemático es más conveniente para describir esta situación?

SOLUCIÓN:

Ver páginas 98-102 del Módulo IV (177)

De acuerdo a la información suministrada, tenemos que:

$y_2 = 1{,}2\, y_1 = (1 + 0{,}2)y_1$ $\quad y_3 = 1{,}2\, y_2 = 1{,}2\,(1 + 0{,}2)y_1 = (1 + 0{,}2)^2\, y_1$

$y_4 = 1{,}2\, y_3 = 1{,}2\,(1 + 0{,}2)^2\, y_1 = (1 + 0{,}2)^3\, y_1$

$y_5 = 1{,}2\, y_4 = 1{,}2\,(1 + 0{,}2)^3\, y_1 = (1 + 0{,}2)^4\, y_1$

De esta manera tenemos que los datos suministrados cumplen una relación del tipo:

$$y_m = (1 + 0{,}2)^m\, y_1,$$

la cual corresponde al **Modelo Exponencial Discreto**.
Si deseamos usar un modelo continuo, podríamos usar una la relación:

$$y_m = (1 + 0{,}2)^t\, y_1,\ t \geq 0.$$

♦

FIN DEL MODELO.