UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
VICERRECTORADO ACADEMICO
ÁREA DE MATEMÁTICA

Matemática II (178-179)
Fecha: 03/10/2009

MODELO DE RESPUESTA

OBJ 1 PTA 1

Usando el **ÁLGEBRA DE LÍMITE**, Calcular: $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}$

RESPUESTA

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}=\left(\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}$$

Resolvamos la base y el exponente de la expresión, aplicando las propiedades del álgebra de Límite (Págs. 38 y 40, Modulo I, Matemática II, UNA):

- Efectuemos para $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt[3]{x+11}-(1+x)\right)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{2x+15}+\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{x}{3}\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{x+11}-\lim\limits_{x\to -3}(1+x)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to -3}(2x+15)}+\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to -3}(x)}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -3}(x+11)}-\lim\limits_{x\to -3}(1+x)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\lim\limits_{x\to -3}(x)+\lim\limits_{x\to -3}(15)}+\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to -3}(x)}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -3}(x)+\lim\limits_{x\to -3}(11)}-\lim\limits_{x\to -3}(1)-\lim\limits_{x\to -3}(x)}=\frac{\sqrt{-6+15}+\frac{1}{3}.(-3)}{\sqrt[3]{-3+11}-1+3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

- Efectuemos para $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2-7\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{-3x}\right)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2)-\lim\limits_{x\to -3}(7)}{\lim\limits_{x\to -3}(\sqrt{-3x})}=\frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2)-\lim\limits_{x\to -3}(7)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to -3}(-3x)}}=\frac{(-3)^2-7}{\sqrt{(-3).(-3)}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x\to -3}\left(\frac{\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

OBJ 2 PTA 2

Calcular: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$

RESPUESTA

Al evaluar el límite obtenemos la indeterminación del tipo 0/0. Para eliminarla hagamos un cambio de variable.

Sea $x=u^3$, de donde $u=\sqrt[3]{x}$, cuando $x\to 8$ tenemos que $u\to 2$, luego:

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}=\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\sqrt{7+u}-3}{u^3-8}$, multipliquemos y dividamos por la conjugada de $\sqrt{7+u}-3$:

$$\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{7+u}-3}{u^3-8}=\lim_{u\to 2}\frac{(\sqrt{7+u}-3).(\sqrt{7+u}+3)}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)}=\lim_{u\to 2}\frac{(\sqrt{7+u})^2-(3)^2}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)}$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{7+u-9}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)}=\lim_{u\to 2}\frac{u-2}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)}$$

Factoricemos el polinomio (u^3-8):

$\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}.(u^2+2u+4).(\sqrt{7+u}+3)}$ Simplificando ($u-2$)

$$\lim_{u\to 2}\frac{1}{(u^2+2u+4).(\sqrt{7+u}+3)}=\frac{1}{(4+4+4).(3+3)}=\frac{1}{72}$$

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}=\frac{1}{72}}$$

OBJ 3 PTA 3

Estudiar la continuidad de la función f(x) : $D\to IR$,definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x}, & \text{si } x<0\\ 0, & \text{si } x=0\\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & \text{si } x>0\end{cases}$$

RESPUESTA

Una función f(x): $R\to R$ es continua en **x=x₀** si cumple con las siguientes condiciones: (Pág. 99 Módulo I, Matemática II, UNA):

1) f(x) está definida en **$x=x_o$**
2) Existe un número L , tal que $\lim_{x\to x_0}$ f(x)= L
3) f(x) = $\lim_{x\to x_0}$ f(x)= L

Puesto que la función está definida por tramos, los posibles puntos de discontinuidad de la función f(x) son:

- x=0 donde se “separan” en tramos
- x=1, anula el denominador del segundo tramo

Comprobemos si se verifican o no la condiciones de continuidad para cada caso:

En efecto:

Estudiemos la continuidad de f(x) en **x=0**

1) f(0) está definida en **x=0,** f(0)= 0

2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x \to 0}$ f(x), para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{x} = 1$$

Por qué?

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

3) Como f(0)=0 es diferente al $\lim\limits_{x \to 0}$ f(x)=1, por lo tanto, la función f(x) ***NO*** es continua en **x=0**

Análogamente estudiemos la continuidad de f(x) en **x=1**

1) f(1) no existe

Por qué?

2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x \to 1}$ f(x), para ello calculemos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ **(¡¡VERIFIQUELO!!)**, luego, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

3) Como f(1) no existe y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la función f(x) ***NO*** es continua en **x=1**

En conclusión, podemos afirmar:

- f(x) **No** es continua para x = 0.
- f(x) **No** es continua para x = 1, pero podría serlo si redefinimos la función y tomamos f(1) = ½
- f(x) es continua para cualquier otro valor x de R

OBJ 4 PTA 4

Calcular la derivada de la función: f(x) = $sen^3 \cos e^{(4x^2-5x)}$

RESPUESTA

Aplicando Propiedades de Derivada y la Regla de la Cadena: (Págs. 53 y 62, Módulo II, Matemática II UNA) y recordando las derivadas de las funciones:

(sen x)\` = cosx ; (cos x)\` = - senx; (e^x)\`= e^x ; $(x)^n$ = n. x^{n-1}, $n \in R$, se tiene:

Sea y= f(x) $= sen^3 \cos e^{(4x^2-5x)} = \left(sen \cos e^{(4x^2-5x)}\right)^3$ aplicando la derivada de una potencia y la regla de la cadena:

$$y' = 3.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)^2.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)' = 3.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)^2.(\cos\cos e^{(4x^2-5x)}.(\cos e^{(4x^2-5x)})')$$

$$y' = 3.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)^2.(\cos\cos e^{(4x^2-5x)}.(-sene^{(4x^2-5x)}).(e^{(4x^2-5x)})')$$

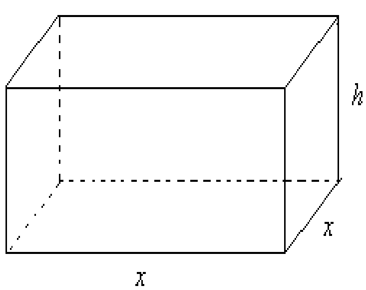
$$y' = 3.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)^2.(\cos\cos e^{(4x^2-5x)}.(-sene^{(4x^2-5x)}).(e^{(4x^2-5x)}).(4x^2-5x)')$$

$$y' = 3.\left(sen\cos e^{(4x^2-5x)}\right)^2.(\cos\cos e^{(4x^2-5x)}.(-sene^{(4x^2-5x)}).(e^{(4x^2-5x)}).(8x-5))$$

OBJ 5 PTA 5

Se desea construir una caja abierta sin cara superior **(ver figura adjunta)** y de base cuadrada con 108 pulgadas cuadradas de material. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

RESPUESTA



Volumen de la caja: $V = x^2 h$ (Función a maximizar)

Como esta función tiene dos variables (*x*, *h*) debemos usar los datos del problema para eliminar una de ellas.

El material usado se obtiene sumando el área de la base y el área de las cuatro caras laterales, así:

Área de la base: x^2 , Área de cada cara lateral: xh

Área total de la superficie: $S = x^2 + 4xh = 108$

Hallando *h* en esta ecuación tenemos:

$$4xh = 108 - x^2$$

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} \quad , \quad 0 < x < \sqrt{108}$$

Sustituyendo *h* en la ecuación de volumen tenemos:

$$V(x) = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) = 27x - \frac{x^3}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \quad , \quad 3x^2 = 108 \quad , \quad x^2 = 36 \quad , \quad x = \pm 6$$

Solo tomamos el valor positivo de *x* porque se trata de una longitud

Valor crítico: *x* = 6

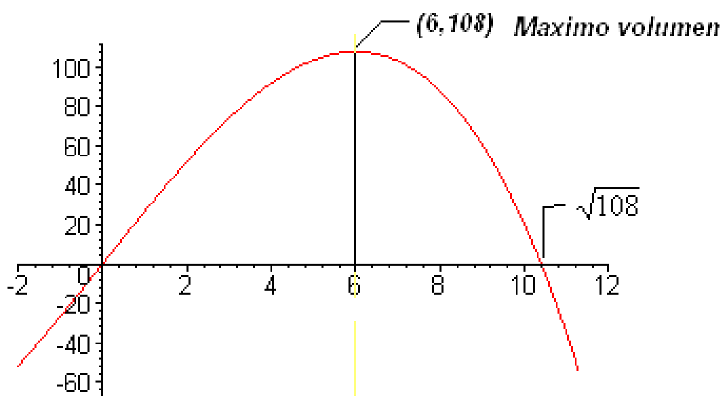
Para este valor crítico, hallemos *h*:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24} = 3$$

Finalmente las dimensiones de la caja son:

Longitud de la base: *x* = 6 pulgadas y Altura de la caja: *h* = 3 pulgadas.

Volumen de la caja: $V = x^2 h$ = 36(3) = 108 pulgadas cúbicas (Obsérvese la gráfica)



<u>Nota:</u> Usando el criterio de la segunda derivada se puede probar que, en efecto, los valores de valores de *x* y *h* corresponden al máximo volumen.

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba