UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
VICERRECTORADO ACADEMICO
ÁREA DE MATEMÁTICA

Matemática II (178-179)
Fecha: 07/11/2009

MODELO DE RESPUESTA

OBJ 6 PTA 1

Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías: A, B y C, en los tamaños grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos

a. Representar esta información en dos matrices

b. Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes**

RESPUESTA

a. Si las filas de la matriz representan a los tres modelos de estanterías: A, B y C y las columnas a los tamaños grande y pequeño, entonces la matriz que representa la información es:

$$M = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix}$$

b. De igual modo, si las filas de la matriz representan a los tamaños grande y pequeño y las columnas a los tornillos y soportes, entonces la matriz que representa la información es:

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

c. La matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería es:

$$M.N = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

OBJ 7 PTA 2

En la semana aniversario de un supermercado, un cliente ha pagado un total de 156 Bs por 24 kg de azúcar, 6 kg de queso blanco y 12 kg de papa. Además, se sabe que 1 kg de papa cuesta el triple que 1 kg de azúcar y que 1 kg de queso cuesta igual que 4 kg de papa más 4 Kg de azúcar.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el precio en Bs. de cada artículo.

b) Resolver el sistema anterior utilizando el **Método de Gauss-Jordan**

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes**

RESPUESTA

a) Sea x= el precio en Bs de azúcar .

y= el precio en Bs de queso blanco.

z= el precio en Bs de papá.

Las ecuaciones que representan el planteamiento dado son las siguientes:

- Por 24 kg de azúcar, 6 kg de queso blanco y 12 kg de papa, el cliente pagó 156 Bs:

  $\Rightarrow 24x + 6y + 12z = 156$

- 1 kg de papa cuesta el triple que 1 kg de azúcar:

  $\Rightarrow z = 3x$

- 1 kg de queso cuesta igual que 4 kg de papa más 4 kg. de azúcar:

  $\Rightarrow y = 4z + 4x$

luego, el sistema viene representado por :

$$\begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ z=3x \\ y=4z+4x \end{cases} \quad \text{ordenando:} \Rightarrow \begin{cases} 24x+6y+12z=156 \\ -3x+z=0 \\ -4x+y-4z=0 \end{cases}$$

b) Al aplicar el método de Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones planteado se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 6 & 12 & 156 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow \frac{1}{6} f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 26 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + 4f1]{f_2 \to f_2 + 3f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & 3 & 10 & 78 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & -2 & 2 & -26 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{2} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_2]{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{13} f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to f_2 + f_3]{f_1 \to f_1 - 4f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=16 \\ z=3 \end{cases}$, es decir, el precio del kg de azúcar es de 1 Bs, el kg. de queso 16 Bs. y el kg de papa 3 Bs.

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 3

Demostrar utilizando el principio de Inducción Matemática que:

$$\text{P(n)= } 1.5^1 + 2.5^2 + 3.5^3 + \ldots + n.5^n = \frac{5+(4n-1).5^{n+1}}{16} \quad , \quad n \in N$$

RESPUESTA

i) Demostremos que para n = 1 es verdadera.

$$\text{P(1)= } 1.5^1 = \frac{5+(4-1).5^2}{16} \Rightarrow 5 = \frac{80}{16} \quad \text{por lo tanto P(1) es verdadera}$$

ii) Supongamos que para n=k es verdadera.

Hipótesis Inductiva (Se supone verdadera)

$$P(k)= 1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+k.5^k = \frac{5+(4k-1).5^{k+1}}{16}$$

iii) Debe demostrarse que siendo P(k) verdadera entonces P(k+1) es verdadera, es decir,

$$P(k+1)= 1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+(k+1).5^{k+1} = \frac{5+(4k+3).5^{k+2}}{16}$$

En efecto:
De la hipótesis inductiva, se tiene:

$$1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+k.5^k+(k+1).5^{k+1} = \frac{5+(4k-1).5^{k+1}}{16}+(k+1).5^{k+1}$$

$$= \frac{5+(4k-1).5^{k+1}+16.(k+1).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5+\left[(4k-1)+16.(k+1)\right].5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5+(4k-1+16k+16).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5+(20k+15).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5+(4k+3).5.5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5+(4k+3).5^{k+2}}{16}$$

Por tanto, P(k+1) es verdadera. Luego, por i) y ii) queda demostrado que :

$$P(n)= 1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+n.5^n = \frac{5+(4n-1).5^{n+1}}{16} \text{ es verdadera para } n \in N$$

OBJ 9 PTA 4

En un lago artificial se introdujo cierta especie de peces. Un grupo de acuicultores estudia la evolución de esta población, la cual crece bajo la relación:

$$N(t) = N_0e^{0,2t},$$

donde t es medido en años y N_0 es la población inicial. Determinar para qué valor de **t,** la población inicial se quintuplica.

RESPUESTA

Debemos hallar el valor de **t** para el cual $N(t) = 5N_0$, luego:

$$N_0e^{0,2t} = 5N_0 \Rightarrow e^{0,2t} = 5 \text{ , aplicando propiedades de ln :}$$

$$\text{Ln } e^{0,2t} = \text{Ln } 5$$

Por lo tanto:

$$0,2t = \text{Ln}5 \ , \quad t = \frac{Ln5}{0,2} = 8,047189562$$

Luego t es aproximadamente 8,05, es decir, que en 8 años la población inicial de peces se quintuplica.

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 3

La ecuación de la demanda para el producto de un fabricante es $10p + x + 0.01x^2 = 700$ y la función de costo es $C(x) = 1{,}000 + 0.01x^2$. Calcular la función utilidad marginal y también evaluar la utilidad marginal para:

a) $x = 100$ unidades b) $p = 10Bs$ /unidad.

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes**

RESPUESTA

La utilidad marginal, es la razón de cambio del valor total de la utilidad obtenida con respecto al número de unidades producidas y vendidas (Es decir, la utilidad aproximada obtenida por la fabricación y venta de una unidad adicional).

Si $U(x)$ es la función de la utilidad total por la producción y venta de x unidades $\rightarrow \dfrac{dU}{dx} = U'(x)$ es la función de la utilidad marginal.

La utilidad se calcula restando: (Ingresos) – (Costos), es decir, $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso es $I = px$.

Por lo tanto despejamos p de la ecuación de la demanda y lo multiplicamos por x para obtener la función ingreso:

$$10p = 700 - x - 0.01x^2 \;\rightarrow\; p = 70 - 0.1x - 0.001x^2 \;\rightarrow\; I(x) = px = 70x - 0.1x^2 - 0.001x^3$$

$$U(x) = \left(70x - 0.1x^2 - 0.001x^3\right) - \left(1{,}000 + 0.01x^2\right) = -0.001x^3 - 0.11x^2 + 70x - 1{,}000$$

$U'(x) = -0.003x^2 - 0.22x + 70$. Esta es la función utilidad marginal, para evaluarla en x = 100 simplemente sustituimos este valor de x en dicha función. Para evaluarla en p = 10 tenemos que calcular primero cuánto vale x para ese valor de p en la ecuación de la demanda:

$10(10) + x + 0.01x^2 = 700$. Ordenando la ecuación cuadrática nos queda: $0.01x^2 + x - 600 = 0$.

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(0.01)(-600)}}{2(0.01)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{0.02} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{0.02} = \frac{-1 \pm 5}{0.02} = \frac{4}{0.02} = 200$$

a) $U'(100) = -0.003(100)^2 - 0.22(100) + 70 = -30 - 22 + 70$ =18 Bs/unidad adicional.

b) $U'(200) = -0.003(200)^2 - 0.22(200) + 70 = -120 - 44 + 70$ = -94, es decir, 94 Bs /unidad extra.

OBJ 9 PTA 4

Supongamos que son tres los sectores de economía de un país: agrario, industrial y servicios. Según datos del año 1994:

1. Del sector agrario se conocen los siguientes datos estadísticos (en miles de millones): 9 en productos del propio sector, 3 del sector industrial, 1 del sector servicios; siendo la demanda total en el sector 12.
2. El sector industrial empleó: 12 en materias del sector agrario, 31 en los propios productos industriales, y 10 en servicios; la demanda final 47.
3. El sector de servicios demanda del agrario 0, del industrial 6 y del propio 5; siendo el total de la demanda en el sector 31.

a. Construir la tabla input-output

b. Calcular la matriz tecnológica

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes**

RESPUESTA

a.

		comprador			Demanda final	Output total
		1	**2**	**3**		
Vendedor	**1**	9	12	0	12	33
	2	3	31	6	47	87
	3	1	10	5	31	47

b. De acuerdo a los planteamientos de la pág.88 del texto Matemática II UNA, Módulo IV, la matriz tecnológica es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9/33 & 12/87 & 0 \\ 3/33 & 31/87 & 6/47 \\ 1/33 & 10/87 & 5/47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,14 & 0 \\ 0,09 & 0,36 & 0,13 \\ 0,03 & 0,11 & 0,11 \end{pmatrix}$$

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

E.M/clp.