UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA
VICERRECTORADO ACADEMICO
ÁREA DE MATEMÁTICA

Matemática II (178-179)
Fecha: 12/12/2009
PRUEBA INTEGRAL

MODELO DE RESPUESTA

OBJ 1 PTA 1

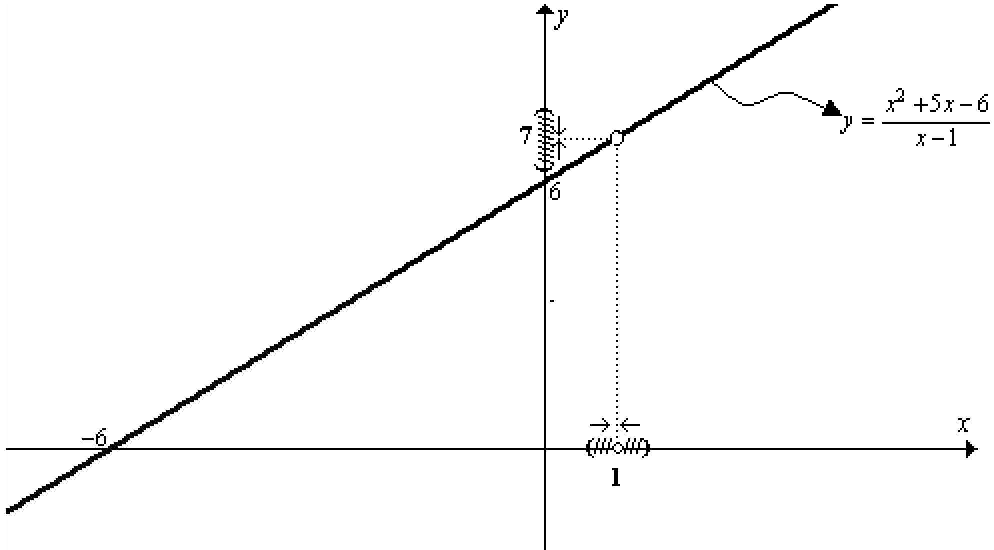
Estudiar y graficar el comportamiento de la función: $f(x) = \dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$, en las cercanías de x= 1

RESPUESTA

Ciertas funciones de variable real presentan un comportamiento un tanto singular en la cercanía de un punto. Por esta razón, evaluaremos la función dada para ciertos valores de x cada vez más próximos a 1, con lo que podremos por simple inspección concluir y tener una idea del concepto de límite. En efecto, construyamos la siguiente tabla:

x	$y = \dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$
0.90	6.90
0.95	6.95
0.99	6.99
…	…
1.01	7.01
1.05	7.05
1.10	7.10

En la tabla de valores se han ubicado unas flechas para dar a entender que tomamos a la variable x aproximándose a 1 en ambas direcciones y se observa que los valores de la variable y se van acercando a 7. Aunque son sólo seis valores, parece ser que esta función se aproxima a tomar el valor de 7 cada vez que la variable independiente x se aproxima a tomar el valor de 1, es decir, que podemos escribir este comportamiento de la siguiente forma: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+5x-6}{x-1} = 7$. Es importante notar que no es necesario que la función esté definida en el punto de aproximación. Este comportamiento, lo podemos representar gráficamente:



Con lo anterior **,** podemos emitir la siguiente definición: Una función f tiene límite L en un punto x_0 , si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor x_0. Lo que se denota como: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, y en nuestro caso particular , $\lim_{x \to 1} f(x) = 7$.

OBJ 2 PTA 2

Calcular: $\lim_{x \to 4} \dfrac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2}$

RESPUESTA

Al evaluar el límite obtenemos la indeterminación del tipo 0/0. Este límite puede resolver de dos formas diferentes:

1) Factoricemos la expresión: $x + 5\sqrt{x} - 14 = (\sqrt{x} + 7).(\sqrt{x} - 2)$ **¿ Por qué ?**

luego, $\lim_{x \to 4} \dfrac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x} + 7).\cancel{(\sqrt{x} - 2)}}{\cancel{(\sqrt{x} - 2)}}$ Simplificando $(\sqrt{x} - 2)$

$\lim_{x \to 4} (\sqrt{x} + 7) = \sqrt{4} + 7 = 9$

2) Hagamos un cambio de variable: Sea $x = u^2$, de donde $u = \sqrt{x}$, cuando $x \to 4$ tenemos que $u \to 2$, luego:

$\lim_{x \to 4} \dfrac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{u \to 2} \dfrac{u^2 + 5u - 14}{u - 2}$ Factoricemos el polinomio ($u^2 + 5u - 14$):

$$\lim_{u \to 2} \frac{(u+7).\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}} \quad \text{Simplificando } (u-2)$$

$$\lim_{u \to 2} (u+7) = 2+7 = 9$$

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x \to 8} \frac{x+5\sqrt{x}-14}{\sqrt{x}-2} = 9}$$

OBJ 3 PTA 3

Estudiar la continuidad de la función g(x), definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x < 0 \\ 2, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2}{(x-1)}, & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

RESPUESTA

Una función g(x): $R \to R$ es continua en $\mathbf{x=x_0}$ si cumple con las siguientes condiciones: (Pág. 99 Módulo I, Matemática II, UNA):

1) g(x) está definida en $\mathbf{x=x_0}$
2) Existe un número L , tal que $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$
3) $g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$

Como podemos observar la función está compuesta de tres tramos polinómicos. Es útil recordar que los polinomios son continuos en todo **R**, y sus cocientes lo son en todo **R** excepto en los *x* que anulen el denominador. En el tercer intervalo de la función vemos que para *x*=1 ésta no estaría definida, y por tanto *x*=1 sería un punto de discontinuidad, pero se indica que en este tramo sólo podemos tomar valores mayores que 1.Por otra parte, siempre hay que sospechar de posibles discontinuidades en los puntos que sirven de separación de los tramos; en este caso particular de la función esos puntos son x= 0 y x=1. En otras palabras, los posibles puntos de discontinuidad de la función g(x) son:

- x=0 donde se "separan" en tramos
- x=1, anula el denominador del tercer tramo

Comprobemos si se verifican o no las condiciones de continuidad para cada caso:

En efecto:

Estudiemos la continuidad de g(x) en **x=0**

1) g(0) está definida en **x=0,** g(0)= 2
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x\to 0}$ g(x), para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2\,,\quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$

3) Como g(0)= $\lim\limits_{x\to 0}$ g(x)=2, $\Rightarrow$ la función g(x) es continua en **x=0**

Análogamente estudiemos la continuidad de g(x) en **x=1**

1) g(1) está definida en **x=1,** g(1)= 2
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x\to 1}$ g(x), para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{(x-1)} = +\infty$$ **¿ Por qué ?** , $$\lim_{x\to 1^-} 2 = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existe, con lo cual la función g(x)

NO es continua en x=1

En conclusión, podemos afirmar:

- g(x) es continua para x = 0.
- g(x) presenta una discontinuidad esencial para x = 1
- g(x) es continua para cualquier otro valor x de R

OBJ 4 PTA 4

Si $y=\ln\left[\dfrac{(3x-1)^2(5x+1)^5}{4x-3}\right]$. Encontrar la segunda derivada de la función

RESPUESTA

Encontremos la segunda derivada de la función, es decir, y'':
Por propiedades de Ln se tiene:

$$y=\ln\left[\frac{(3x-1)^2(5x+1)^5}{4x-3}\right]=2\ln(3x-1)+5\ln(5x+1)-\ln(4x-3) \text{ ,luego}$$

$$y'=2\left(\frac{3}{3x-1}\right)+5\left(\frac{5}{5x+1}\right)-\left(\frac{4}{4x-3}\right)\rightarrow y'=\frac{6}{3x-1}+\frac{25}{5x+1}-\frac{4}{4x-3}$$

$$y'=6(3x-1)^{-1}+25(5x+1)^{-1}-4(4x-3)^{-1} \text{ de donde:}$$

$$y''=-6(3x-1)^{-2}.(3)-25(5x+1)^{-2}.5+4(4x-3)^{-2}.4=-\frac{18}{(3x-1)^2}-\frac{125}{(5x+1)^2}+\frac{16}{(4x-3)^2}$$

Finalmente: $\boxed{y''=-\dfrac{18}{(3x-1)^2}-\dfrac{125}{(5x+1)^2}+\dfrac{16}{(4x-3)^2}}$

OBJ 5 PTA 5

Determinar los puntos de inflexión, intervalos de concavidad, convexidad y graficar la función $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{x^3}{6}-x^2+1$

RESPUESTA

$f(x)$ es una función continua en todo su dominio por ser una función polinómica.

Calculemos $f'(x)$ y $f''(x)$:

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x \ , \quad f''(x)=x^2+x-2.$$

Hagamos $f''(x)=0$ para determinar los puntos de inflexión de $f(x)$:

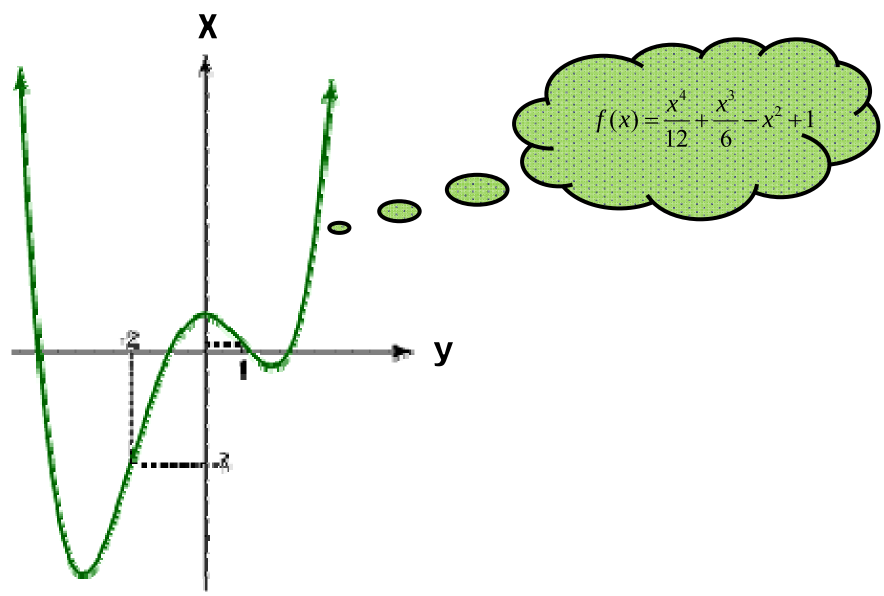
$f''(x)=x^2+x-2=(x-1).(x+2)$=0, luego los puntos de inflexión son : $x_1=1, x_2=-2$

Recordemos la definición de Intervalo de Concavidad y Convexidad (Ver pág.182 Matemática II UNA, Módulo II)**:** f(x) es convexa en aquellos intervalos en que f′′(x) ≥ 0 y

es cóncava para aquellos intervalos en que $f''(x) \leq 0$. Por lo tanto, estudiemos las desigualdades $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$
En efecto:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
Punto de prueba	x= -3	x= 0	x= 2
Signo de f ''(x)	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba (convexa)	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba (convexa)

Luego $f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, cóncava en el intervalo $(-2, 1)$. Luego los puntos $(-2, f(-2)) = (-2, -3)$ y $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ son puntos en los que cambia la concavidad y por tanto son puntos de inflexión.
La gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:



OBJ 6 PTA 6

Calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{v} = (\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ y $\vec{w} = (\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$

RESPUESTA

Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, entonces:

$\cos\theta = \dfrac{\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|}$, $\theta \in [0, \pi]$ (ver pág. 67. Matemática II, UNA. Módulo III).

Como:

$\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}} = (\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1).(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}-1).(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}+1).(\sqrt{3}-1)$ entonces:

$\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}} = (\sqrt{3})^2 - (1)^2 + (\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 3-1+3-1 = 6-2 = 4$. Además:

$|\vec{\mathbf{v}}|.|\vec{\mathbf{w}}| = |(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)|.|(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)| = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2}.\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + (1)^2}.\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} + (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} + (1)^2}$

$= \sqrt{8}.\sqrt{8} = (\sqrt{8})^2 = 8$

Finalmente:

$\cos\theta = \dfrac{\vec{\mathbf{v}} \bullet \vec{\mathbf{w}}}{|\vec{\mathbf{v}}|\,|\vec{\mathbf{w}}|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ con lo cual $\boxed{\theta = \arccos\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = 60^{\circ} = \pi/3,\quad \theta \in [0, \pi]}$

OBJ 7 PTA 7

Utilizando el **<u>Método de Gauss-Jordan</u>** , encontrar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

RESPUESTA

Al usar el método de Gauss-Jordan, para encontrar la inversa de la matriz A obtenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \to -F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 + 3F_3]{F_1 \to F_1 - 9F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Por lo tanto la matriz inversa de A es $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}}$.

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 8

El ingreso en pesos por la venta de x carteras está dado por $R(x) = 201\sqrt[3]{x} + 2x$ para $4 \le x \le 80$. El costo de fabricar x carteras está dado por $C(x) = 0.1x^2 + 5x + 40$.

a) Encontrar la función de ganancia.
b) ¿Cuál es la ganancia al vender 10 carteras?, ¿20 carteras?, ¿50 carteras?
c) Encontrar la función de ganancia marginal.
d) ¿Cuál es la ganancia marginal al vender 10 carteras?, ¿20 carteras?, ¿50 carteras?

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente al menos tres partes**

RESPUESTA

a) Sea $P(x)$: la ganancia, expresada como la diferencia entre ingreso y costo, entonces:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = (201\sqrt[3]{x} + 2x) - (0.1x^2 + 5x + 40)$

$P(x) = (201\sqrt[3]{x} + 2x - 0.1x^2 - 5x - 40)$ Luego, $\boxed{P(x) = -0.1x^2 - 3x + 201\sqrt[3]{x} - 40}$

b) La ganancia en pesos por la venta del número de carteras para las cantidades especificadas es: $\boxed{P(10) = \$353.04\ ;\ P(20) = \$405.60\ ;\ P(50) = \$300.49}$

c) $\boxed{P'(x) = -0.2x - 3 + \dfrac{67}{\sqrt[3]{x^2}}\ ;}$

d) La ganancia marginal en pesos, que es la razón o tasa con que está cambiando la ganancia por la venta de una cartera adicional para las cantidades especificadas es:

$P'(10) = \$9.43/$ cartera extra; $P'(20) = \$2.09/$ cartera extra.;
$P'(50) = -\$8.06/$ cartera extra

OBJ 9 PTA 9

Completar los datos de la siguiente tabla de interacción de una cierta economía cerrada conformada por dos industrias L y S

	L	**S**	**Demanda Sector Externo**	**Producción Total**
L			500	1000
S			500	1500

tomando en cuenta que la matriz tecnológica de esta economía es: A = $\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

RESPUESTA

De acuerdo a la definición de la matriz tecnológica (Ver pág. 88. Matemática II. UNA, Módulo IV) del texto, los coeficientes de esta matriz vienen dados a través de la relación: $\mathbf{a_{ij}} = \dfrac{b_{ij}}{x_j}$ **, i = 1,2 , j = 1,2.** donde b_{ij} , x_j , i , j = 1 , 2 son los datos que se indican en la siguiente tabla:

	L	**S**	**Demanda Sector Externo**	**Producción Total**
L	b_{11}	b_{12}	500	x_1
S	b_{21}	b_{22}	500	x_2

Por lo tanto, en nuestro caso tenemos:

$1/5 = a_{11} = b_{11} / 1000$, $2/5 = a_{21} = b_{21} / 1000$

$1/5 = a_{12} = b_{12} / 1500$, $2/5 = a_{22} = b_{22} / 1500$

De esta manera, resulta:

$b_{11} = 1000 / 5 = 200$, $b_{21} = 2000 / 5 = 400$

$b_{12} = 1500 / 5 = 300$, $b_{22} = 3000 / 5 = 600$

Por lo tanto, al completar la tabla de interacción económica, obtenemos:

	L	S	Demanda Sector Externo	Producción Total
L	200	300	500	1000
S	400	600	500	1500

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 8

Sea IN el conjunto de los números naturales y considerando los siguientes conjuntos:

A = $\{ x \in IN: x \leq 20$ y x es par $\}$

B = $\{x \in IN$: x es múltiplo de 5 $\}$

C = $\{ x \in IN: \sqrt{x}$ es entero$\}$.

Determinar la finitud o infinitud de los conjuntos A, B y C.

RESPUESTA

Al observar los conjuntos A, B y C, podemos notar que:

$A = \{ 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 \}$

$B = \{ 0 , 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , 35 , \ldots, 15625, \ldots \}$

$C = \{ 0 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , 49 , 64 , \ldots, 10000 , \ldots \}$

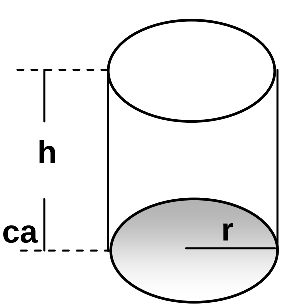
y de estos conjuntos el único que tiene un número finito de elementos es el conjunto A (tiene 11 elementos). Por lo tanto A es un conjunto finito y B, C son conjuntos infinitos (ver pág. 70 Matemática II, UNA. Módulo IV).

OBJ 9 PTA 9

La superficie lateral de un cilindro es 8π cm^2; si se extrae del cilindro una semiesfera cuya base coincide con la del cilindro. Hallar la altura **h** y el radio **r** de la base del cilindro para que el volumen restante (volumen del cilindro menos volumen de la semiesfera) sea máximo.

RESPUESTA

La superficie lateral es $S_1 = 8\pi$ cm^2



$S_1 = 2.\pi.r.h = 8\pi \Rightarrow r.\ h=4 \Rightarrow h = \dfrac{4}{r}$

V=Vcilindro – V semiesfera

$$V = \pi.r^2.h - \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} \Rightarrow \pi.r^2.\ \frac{4}{r} - \frac{4\pi r^3}{6} \Rightarrow 4.\pi.r - \frac{2\pi r^3}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dr} = 4\pi - \frac{2}{3}.\pi.3r^2 = 4\pi - 2\pi r^2 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = 0 \Rightarrow 4\pi - 2\pi r^2 = 0$$

$$2\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad h = \frac{4}{r} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

El volumen es máximo ya que:

Si $0 < r < \sqrt{2}$ entonces $\dfrac{dv}{dr} > 0$ y Si $r > \sqrt{2}$ entonces $\dfrac{dv}{dr} < 0$

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

E.M/clp.