Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemática II (178-179)
Cód. Carrera: 106
Fecha: 27-03-2010

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1,2,3,4 y 5.

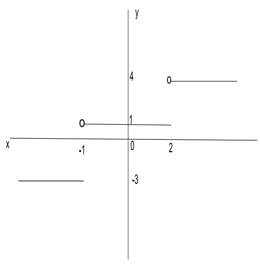
OBJ. 1 PTA 1

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- a. Haz una representación gráfica de f.
- b. Calcular el límite de f cuando x se acerca a 0 por la izquierda y por la derecha.
- c.Calcular el límite de f cuando x se acerca a -1 por la izquierda y por la derecha.
- d. Calcular el límite de f cuando x se acerca 2 por la izquierda y por la derecha.

Solución :
- a. La función f está dado por el siguiente gráfico



- b. Cuando $x = 0$ se acerca a 1 por la derecha y por la izquierda.
- c. Cuando nos acercamos a -1 los valores que alcanza la función se acerca a los valores 1 por la derecha y -3 por la izquierda.
- d. $x = 2$ se acerca a los valores 1por la izquierda y 4 por la derecha.

□

OBJ. 2 PTA 2

Determinar

$$\lim_{x\to 0} \frac{2tan^2(x)}{x^2}$$

si es que existe.

Solución : Dado que el $\lim_{x\to 0} 2tan^2(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
Así obtenemos una indeterminación de la forma 0/0. debemos romper la indeterminación
$\lim_{x\to 0} \frac{2tan^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2sen^2(x)}{x^2cos^2(x)}$
$= \lim_{x\to 0} \frac{2sen(x)}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos^2(x)} = 2(1)(1) = 2$

□

OBJ. 3 PTA 3

Consideremos la función $f : [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x}{2} - sen(x)$$

Demuestre que existe un elemento c en el intervalo $(1, 5)$ tal que $f(c) = 0$

Solución :

i.) f es continua en $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$.

ii.) Como $f(\frac{\pi}{3}) = -0,346 < 0$ y $f(\frac{5\pi}{3}) = 3,486 > 0$.
Luego por el teorema de Bolzano existe un $c \in (1, 5)$ tal que $f(c) = 0$ es decir $\frac{c}{2} - sen(c) = 0$

□

OBJ. 4 PTA 4

Dada $f(x) = 4x^3 - 9x$ verificar si cumple las hipotesis del teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$

Solución : **i.)** Dado que f es una función continua por ser un polinomio más aún en el intervalo cerrado $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$.

ii.) f es diferenciable en el intervalo abierto $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$
en efecto $f'(x) = 12x^2 - 9$

iii.) $f(a) = f(\frac{-3}{2}) = 0$ y $f(b) = f(\frac{3}{2}) = 0$
entonces existe un número c en el intervalo $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}) = 0$ tal que
$f'(c) = 0 \to 12c^2 - 9 = 0 \to c^2 = \frac{9}{12}$
$\to c^2 = \frac{3}{4} \to c = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$
por lo tanto $\frac{\sqrt{3}}{4} \in (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$, $-\frac{\sqrt{3}}{4} \in (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$

□

OBJ 5 PTA 5

Realizar el estudio completo de la siguiente función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2$

Solución : **i.)** $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ii.) Puntos de corte con el Ejes x hacemos $y = 0$

$$\begin{aligned} y = 0 &\leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ &\leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{x^2 - 1} \\ &\leftrightarrow x^4 = 4(x^2 - 1) \\ &\leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \\ &\leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \in Dom(f) \end{aligned}$$

por lo tanto $P_1 = (-\sqrt{2}, 0)$, $P_2 = (\sqrt{2}, 0)$
Punto de corte con el eje y hacemos $x = 0$ como $x = 0 \notin Dom(f)$ por lo tanto no tiene puntos de corte con el eje y

iii.) Simetría con el eje x
cambiamos y por $-y$ y obtenemos que $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2 \neq -y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2$
por lo tanto no es simétrica con respecto al eje x

iv.) Simetría con el eje y
cambiamos x por $-x$ y obtenemos que $y = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-1}} - 2 \equiv y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2$

por lo tanto es simétrica con respecto al eje y

vi.) Asintotas Horizontales:
ya que $y = lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2 = \infty$
por lo tanto no tiene asintotas horizontales.

vii.) Asintotas Verticales:
$y = lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2 = \infty$
$y = lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2 = \infty$
por lo tanto las asintotas verticales son $x = -1$ y $x = 1$

viii.) Asintota Oblicuas a la derecha
$m_1 = lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2}{x} = 1$
$b_1 = lim_{x\to\infty} f(x) - x = lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2 - x = -2$
por lo tanto la asintota oblicua por la derecha es la recta $y = x - 2$
Asintotas Oblicuas a la izquierda
$m_2 = lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$
$b_1 = lim_{x\to -\infty} f(x) - x = -2$
por lo tanto la asintota oblicua por la izquierda es la recta $y = -x - 2$

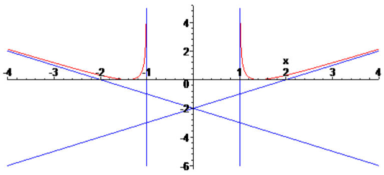
ix.) Criterio de la primera derivada $f'(x) = (\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - 2)' = \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{3/2}}$ para encontrar los puntos críticos tomamos

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\leftrightarrow \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^{3/2}} = 0 \\ &\leftrightarrow x(x^2-2) = 0 \\ &\leftrightarrow x = 0, (x^2-2) = 0 \\ &\leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

por lo tanto los puntos críticos son $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$

x.) Criterio de la segunda derivada
$f''(x) = \frac{x^2+2}{(x^2-1)^{5/2}}$
para encontrar los puntos de inflexión tomamos
$f''(x) = 0 \leftrightarrow x^2 + 2 = 0$
luego f'' no se anula es decir no posee puntos de inflexión
Así realizando los respectivos cuadro observamos que la
Zona de crecimiento: $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
Zona de decrecimiento: $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

xi.) Bosquejo del gráfico f



□

FIN DEL MODELO