Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Matemática II (178 – 179)
Cód. Carrera: 126 – 236 – 280 – 508 – 610 – 611 – 612 – 613
Fecha: 21 – 01 - 12

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

A continuación hacemos varias afirmaciones relacionadas con límites de funciones.

Indica con una **V** o una **F** en el espacio correspondiente según que la afirmación hecha sea verdadera o falsa respectivamente.

a. Si $f:IR-\{0\} \to IR$ es la función definida por la expresión $f(x) = \dfrac{|3x|}{4x}$, entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{4} \quad \_\_\_\_\_$$

b. Si $f:IR\to IR$ es una función y $x_0 \in IR$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ _____

c. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} ((\mathrm{Ln}(e \,\mathrm{sen}\, x)) + 3\cos x) = -2$ ______, (donde **e** es la base del logarítmo neperiano).

Respuesta:

a. __**F**__ Si observamos la función f para valores positivos y negativos, tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} 3/4 & , \quad x > 0 \\ -3/4 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

De esta manera f no se aproxima a un único valor L cuado x se acerca 0 y por lo tanto no existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b. __**F**__ Dada una función $f:IR\to IR$ y $x_0 \in IR$, no siempre existe el límite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, por ejemplo considera la función $f(x) = [x]$ y $x_0 = 0$. (Se pueden construir una infinidad de ejemplos. (Construye varios)

c. __**F**__ Usando las propiedades enunciadas en la p. 40 del texto, tenemos que:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \mathrm{Ln}(e\,\mathrm{sen}\, x) = \mathrm{Ln}\, e = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} 3\cos x = 0 \qquad (\text{¿por qué?})$$

Luego al usar el álgebra de límites (p.38 del texto), obtenemos:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} ((\mathrm{Ln}(e\,\mathrm{sen}\, x)) + 3\cos x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\mathrm{Ln}(e\,\mathrm{sen}\, x) + \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} 3\cos x = 1$$

OBJ 2 PTA 2

Calcular : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 - n\sqrt{n^4+1}}{n+1}$

Respuesta:

Al tratar de calcular este límite se nos presenta, entre otras cosas, una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Entonces multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de $n^3 - n\sqrt{n^4+1}$:

$$\frac{n^3 - n\sqrt{n^4+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n^3 - n\sqrt{n^4+1})\frac{n^3 + n\sqrt{n^4+1}}{n^3 + n\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{n+1}\,\frac{n^6 - n^2(n^4+1)}{n^3 + n\sqrt{n^4+1}}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{-n^2}{n^3 + n\sqrt{n^4+1}} = -\frac{n^2}{n^2+n}\;\frac{1}{n^2+\sqrt{n^4+1}}$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{n^2}{n^2+1} = -1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+\sqrt{n^4+1}} = 0 \leftarrow$ *¿por qué?* ,

resulta que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 - n\sqrt{n^4+1}}{n+1} = 0$$

OBJ 3 PTA 3

Sea $g:(0\,,\,2) \to$ IR la función definida por $g(x) = \dfrac{1}{x} + [\,x\,]$, $x \in Dg$.

Determine si la función g, es contínua en su dominio.

Nota: Los corchetes denotan la función parte entera.

Respuesta:

La función f es la suma de las funciones g, h: $(0\,,\,2) \to$ IR, definidas por

$$g(x) = \frac{1}{x}\quad,\quad h(x) = [x].$$

Como las funciones g y h son continuas en los intervalos (0 , 1), (1 , 2) (*¿por qué*?) resulta que la función f = g + h es continua en el conjunto $(0\,,\,1) \cup (1\,,\,2)$. Veamos qué ocurre en el punto x = 1. Calculemos los límites laterales de f en x = 1

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{x} + [x]\right).$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to1^-} [x] = 0$ (*¿por qué*?) resulta que: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{1}{x} + [x]\right) = 1$

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x\to1^+} [x] = 1$, se tiene:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x} + [x]\right) = 2.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x) \quad \text{y así} \quad \textbf{f no es continua en x =1}.$$

En conclusión, en el Dg = (0 , 2 **): La función g es continua en el conjunto $(0\,,\,1) \cup (1\,,\,2)$.**

OBJ 4 PTA 4

Si la ecuación **Ln (x + y) = x – y** define a “**y**” como función implícita de **x** .

Calcula la derivada $y'\left(\frac{1}{2}\right)$ sabiendo que $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Respuesta:

Derivando implícitamente, respecto de x, en la ecuación Ln (x + y) = x – y, resulta:

$$(\text{Ln}\,(x+y))' = (x-y)' \quad , \quad \frac{(x+y)'}{x+y} = 1-y' \quad , \quad \frac{1+y'}{x+y} = 1-y'.$$

Despejando y' en la última ecuación, obtenemos:

$$1 + y' = (x + y)(1 - y') \quad , \quad 1 + y' = x - xy' + y - yy' \quad , \quad y'(1 + x + y) = x + y - 1,$$

luego:

$$y' = \frac{x+y-1}{1+x+y}.$$

De esta manera

$$y'(1/2) = \frac{1/2 + y(1/2) - 1}{1 + 1/2 + y(1/2)} = \frac{1/2 + 1/2 - 1}{1 + 1/2 + y(1/2)} = 0.$$

OBJ 5 PTA 5

Sea f:IR→IR la función definida a través de la expresión: $\mathbf{f(x) = Ln\,(e^x + 1).}$

Verifica que: $f''(x) = \dfrac{f'(x)}{e^x+1}$.

Respuesta:

Derivando, tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{e^x+1}(e^x+1)' = \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2},$$

luego:

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{e^x+1}\,\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}\,f'(x) = \frac{f'(x)}{e^x+1}.$$

FIN DEL MODELO DE RESPUESTAS