Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico

Área De Matemática

Matemática II (178 – 179)
Cód. Carrera: 126 – 236 – 280 – 508 – 610 – 611 – 612 – 613
Fecha: 14 – 04 – 12

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^4 + 2x^3 + 1}}{x^2 + 5x + 20}$.

Respuesta

Si intentamos calcular el límite directamente nos encontramos con una indeterminación del tipo ∞/∞. Para eliminar tal indeterminación podemos dividir tanto el numerador como el denominador de $\dfrac{\sqrt{3x^4 + 2x^3 + 1}}{x^2 + 5x + 20}$ por x^2. De esta manera tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2x^3 + 1}}{x^2 + 5x + 20} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^4}}}{1 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{20}{x^2}}.$$

Al observar el segundo límite de la expresión anterior, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}} = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{20}{x^2}\right) = 1,$$

por lo tanto: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 2x^3 + 1}}{x^2 + 5x + 20} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^4}}}{1 + \dfrac{5}{x} + \dfrac{20}{x^2}}. = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

OBJ 2 PTA 2

¿Cuál es el valor del siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$?

Respuesta

Si intentamos calcular observamos que tenemos una indeterminación del tipo 0/0. Como tanto el denominador de $\dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ son polinomios y se anulan en $x = 2$, ambos Son divisibles por **x –2** (ver pág. 56 del texto (Módulo II)). Haciendo las respectivas divisiones tenemos:

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^4 & & -16 & x-2 \\
\cline{4-4}
-x^4+2x^3 & & & x^3+2x^2+4x+8 \\
\cline{1-1}
2x^3 & & & \\
-2x^3+4x^2 & & & \\
\cline{1-2}
 & 4x^2 & & \\
 & -4x^2+8x & & \\
 & & 8x-16 & \\
\cline{2-3}
 & & -8x+16 & \\
 & & 0 & \\
\cline{3-3}
\end{array}
$$

$$\boxed{x^4-16 = (x-2)\,(x^3+2x^2+4x+8)}$$

Procediendo de manera similar dividiendo $x^3 - 2x^2 + x - 2$ entre $x - 2$ (haz la división), resulta: $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2 + 1)$.

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-2x^2+x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2+4x+8}{x^2+1}$$

$$= \frac{8+8+8+8}{4+1} = \frac{32}{5}$$

OBJ 3 PTA 3

¿ Cuáles son los posibles valores de α para que la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por:

$$g(t) = \begin{cases} t^2 + 2t - 10 & , \ t \neq \alpha \\ 25 & , \ t = \alpha \end{cases} \quad ; \ \text{sea continua en } t = \alpha?$$

Respuesta

De acuerdo a la definición de continuidad (ver p.99 del texto(Módulo I)), la función g es continua en $t = \alpha$ si

$$\lim_{t\to\alpha} g(t) = \lim_{t\to\alpha} (t^2 + 2t - 10) = 25 = g(\alpha). \qquad [1]$$

Como

$$\lim_{t\to\alpha} (t^2 + 2t - 10) = \alpha^2 + 2\alpha - 10,$$

la relación [1] se cumple si

$$\alpha^2 + 2\alpha - 10 = 25,$$

o equivalente si

$$\alpha^2 + 2\alpha - 35 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación tenemos:

$$\alpha^2 + 2\alpha - 35 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 7)(\alpha - 5) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7 \text{ o } \alpha = 5.$$

Por lo tanto la función g es continua en $x = \alpha$, para los valores de $\alpha \in \{5\ ,\ -7\}$.

OBJ 4 PTA 4

Determina los intervalos de crecimiento de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$ y analiza la naturaleza de los puntos críticos.

Respuesta
Primero calculemos la derivada de la función f

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{9+x^2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

Observa que f tiene un solo punto crítico en x = 0. Para hallar los intervalos de crecimiento resolvemos las inecuaciones

a) $f'(x) > 0$ b) $f'(x) < 0$

a) $f'(x) > 0$ si y sólo si $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} > 0$, es decir si $x > 0$ pues $\sqrt{9+x^2} > 0$, para todo x . Luego f crece en $(0, +\infty)$.

b) $f'(x) < 0$ si y solo si $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} < 0$, es decir si $x < 0$ pues $\sqrt{9+x^2} > 0$, para todo x. Luego f decrece en $(-\infty, 0)$.

Como en x = 0 hay un cambio de comportamiento pues como acabamos de ver, la función f crece a la derecha del cero y decrece a la izquierda del cero, entonces la función f alcanza un mínimo absoluto en x = 0.

OBJ 5 PTA 5

Use la regla de L′Hôpital para calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\text{Ln}\, x)^3}{x^3}$

Respuesta

En primer lugar debemos observar que como $\lim\limits_{x\to+\infty} (\text{Ln}\, x)^3 = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ y las funciones $f(x) = (\text{Ln}\, x)^3$, $g(x) = x^3$ son derivables podemos aplicar la regla de L′Hôpital para calcular el límite en consideración (ver p. 134 del texto (módulo II)) y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\text{Ln}\, x)^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{((\text{Ln}\, x)^3)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\text{Ln}\, x)^2}{x^3}$$

Aplicando nuevamente la regla de L′Hôpital (¿por qué se puede aplicar?), tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\text{Ln}\, x)^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{((\text{Ln}\, x)^2)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\text{Ln}\, x}{3x^3}$$

Aplicando nuevamente la regla de L′Hôpital (¿por qué se puede aplicar?), tenemos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\text{Ln}\, x}{3x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2\text{Ln}\, x)'}{(3x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{9x^3}$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{9x^3} = 0$, entonces por la regla de L′Hôpital, resulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\text{Ln}x)^3}{x^3} = 0$

OBJ 6 PTA 6

Determina si la matriz producto A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ es invertible.

Respuesta

Como

$$\det A = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -21 & -14 \end{pmatrix} = 9.14 - 6.21 = 0$$

la matriz A no s invertible (ver p.84 del texto, Módulo III).

OBJ 7 PTA 7

Usa el método deGauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

Respuesta

Al usar el método de Gauss-Jordan , tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Como en esta matriz, en la última fila la parte izquierda de la división hay solamente ceros y en la parte derecha hay un -1, **el sistema de ecuaciones no tiene solución**.

ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA - 178

OBJ 8 PTA 8

Determina explícitamente la funcion costo asociada a la producción de cierto bien, sabiendo que la misma es una función cuadrática y que el costo fijo de producción es 200 u.m., y que el costo marginal y el costo medio correspondiente a 10 unidades son iguales a 10 u.m. y 20 u.m., respectivamente.

Respuesta (ver p.27 del texto (Módulo IV)).

Como la función costo es cuadrática tiene al forma $C(q) = aq^2 + bq + c$.

El costo fijo es 200 u.m. , luego $200 = C(0) = c$.

Como las funciones costo marginal y costo medio correspondiente a 10 unidades son iguales a 10 u.m. y 20 u.m., respectivamente, tenemos::

$$C'(q) = 2aq + b \quad , \quad \overline{C}(q) = aq + b + \frac{200}{q}$$

$$C'(10) = 20a + b = 10 \quad , \quad \overline{C}(10) = 10a + b + 20 = 20 \qquad [1]$$

Despejando **a** en [1], resulta: a = 1 y b = = –10.

De esta manera, obtenemos: $\mathbf{C(q) = q^2 - 10q + 200}$

OBJ 9 PTA 9

Una economía formada por dos industrias, tiene la siguiente matriz tecnológica:

$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.Si el vector de producción es $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 100 \end{pmatrix}$ y el vector demanda es $D = \begin{pmatrix} 30 \\ d_2 \end{pmatrix}$.

Determina los valores de x_1 y d_2.

Respuesta

De acuerdo a lo indicado en la pág 82 del texto, Módulo IV, tenemos que:

$$(I - A)\,X = D.$$

Como:

$$(I - A)\,X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}6 \\ -0{,}8 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9x_1 - 60 \\ -0{,}8x_1 + 90 \end{pmatrix},$$

resulta:

$$\begin{pmatrix} 0{,}9x_1 - 60 \\ -0{,}8x_1 + 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

luego:

$$0{,}9x_1 = 90 \quad y \quad -0{,}8x_1 + 90 = d_2..$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos:

$$x_1 = 100 \quad y \quad d_2 = 90 - 0{,}8.100 = 10$$

INGENIERÍA, MATEMÁTICA Y EDUCACIÓN MENCIÓN MATEMÁTICA - 179

OBJ 8 PTA 8

Usar el método de inducción para demostrar que

$$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + ... + (n^2 - n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \quad , \quad \text{para todo natural } n \geq 1.$$

Respuesta

Para n = 1, tenemos $1^2 - 1 = \mathbf{0} = 1(1-1)(1+1)/3$ por lo tanto la relación dada es cierta para n = 1. Supongamos que [1], también es cierta para algún número natural $n \geq 1$, es decir:

$$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + \ldots + (n^2 - n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \quad \longleftarrow \quad \textit{Hipótesis de Inducción}$$

y demostremos que también es cierta para el número n + 1, es decir

$$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + \ldots + (n^2 - n) + ((n+1)^2 - (n+1)) = \frac{(n+1)(n)(n+2)}{3} \longleftarrow \textit{Tesis}$$

En efecto:

$$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + \ldots + (n^2 - n) + ((n+1)^2 - (n+1)) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + (n+1)^2 - (n+1) \qquad \longleftarrow \textit{por hipótesis de inducción}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + n^2 + n \quad = \frac{n(n-1)(n+1) + 3n^2 + 3n}{3}$$

$$= \frac{n(n^2 - 1 + 3n + 3)}{3} = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Por lo tanto la relación

$$(1^2 - 1) + (2^2 - 2) + \ldots + (n^2 - n) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3},$$

se cumple para todo número natura $n \geq 1$.

OBJ 9 PTA 9

Sea $y = g(t)$, $t \in \mathrm{IR}$, una función que satisface las condiciones:

$$g(0) = 20 \quad \text{y} \quad \frac{3}{4}\, g'(t) = -\frac{1}{2}\, g(t), \text{ para todo } t \in \mathrm{IR}.$$

Determina la función $g(t)$

Respuesta

Como $\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{2}{3}$ la *tasa relativa instantánea* de la función g es constante en cada punto t, entonces g es una función exponencial del tipo $g(t) = A\,e^{-\frac{2}{3}t}$. Como $g(0) = A = 20$, tenemos que $\mathbf{g(t) = 20\,e^{-\frac{2}{3}t}}$

FIN DEL MODELO DE RESPUESTAS