Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Nombre de la Asignatura (Código)
Cód. Carrera:
Fecha: 14 – 04 – 2012

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

Usando el **<u>ÁLGEBRA DE LÍMITE</u>**, Calcular: $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}$

<u>RESPUESTA</u>

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}=\left(\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}}$$

Resolvamos la base y el exponente de la expresión, aplicando las propiedades del álgebra de Límite (Págs. 38 y 40, Modulo I, Matemática II, UNA):

- Efectuemos para $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{2x+15}+\dfrac{x}{3}\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt[3]{x+11}-(1+x)\right)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{2x+15}+\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\sqrt[3]{x+11}-\lim\limits_{x\to -3}(1+x)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to -3}(2x+15)}+\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to -3}(x)}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -3}(x+11)}-\lim\limits_{x\to -3}(1+x)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\lim\limits_{x\to -3}(x)+\lim\limits_{x\to -3}(15)}+\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to -3}(x)}{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to -3}(x)+\lim\limits_{x\to -3}(11)}-\lim\limits_{x\to -3}(1)-\lim\limits_{x\to -3}(x)}=\frac{\sqrt{-6+15}+\dfrac{1}{3}.(-3)}{\sqrt[3]{-3+11}-1+3}=\frac{1}{2}$$

- Efectuemos para $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -3}\left(x^2-7\right)}{\lim\limits_{x\to -3}\left(\sqrt{-3x}\right)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2) - \lim\limits_{x\to -3}(7)}{\lim\limits_{x\to -3}(\sqrt{-3x})} = \frac{\lim\limits_{x\to -3}(x^2) - \lim\limits_{x\to -3}(7)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to -3}(-3x)}} = \frac{(-3)^2 - 7}{\sqrt{(-3).(-3)}} = \frac{2}{3}$$

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x\to -3}\left(\frac{\sqrt{2x+15}+\frac{x}{3}}{\sqrt[3]{x+11}-(1+x)}\right)^{\frac{x^2-7}{\sqrt{-3x}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$

OBJ 2 PTA 2

Calcular el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{\mathrm{Ln}\,(2-2\cos x)}$ se obtiene el valor:

a. $-\infty$ **b.** 1 **c.** 0 **d.** $+\infty$

<u>**RESPUESTA**</u>

Al intentar calcular el límite observamos que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt{1+x^2}\right) = 0 \text{ (¿\textit{por qué?}) y } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Ln}(2-2\cos x)} = 0 \text{ (¡\textit{por qué?})}.$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\mathrm{Ln}\,(2-2\cos x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\frac{1}{\mathrm{Ln}(2-2\cos x)}.$$

Usando el álgebra de límites tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\mathrm{Ln}\,(2-2\cos x)} = \left(\lim_{x\to 0^+} 1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{Ln}(2-2\cos x)}\right) = 0.$$

Opción Correcta: **c**

OBJ 3 PTA 3

Estudiar la continuidad de la función f(x) : D→IR ,definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x}, & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

RESPUESTA

Una función f(x): $R \to R$ es continua en **x=x₀** si cumple con las siguientes condiciones: (Pág. 99 Módulo I, Matemática II, UNA):

1. f(x) está definida en $\mathbf{x=x_0}$
2. Existe un número L , tal que $\lim\limits_{x \to x_0}$ f(x)= L
3. f(x) = $\lim\limits_{x \to x_0}$ f(x)= L

Puesto que la función está definida por tramos, los posibles puntos de discontinuidad de la función f(x) son:

- x = 0 donde se "separan" en tramos
- x = 1, anula el denominador del segundo tramo

Comprobemos si se verifican o no la condiciones de continuidad para cada caso:

En efecto:

Estudiemos la continuidad de f(x) en **x=0**

1) f(0) está definida en **x=0,** f(0)= 0
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x \to 0}$ f(x), para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{x} = 1$$

Como

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

3) Como f(0)=0 es diferente al $\lim\limits_{x \to 0}$ f(x)=1, por lo tanto, la función f(x) ***NO*** es continua en **x=0**

Análogamente estudiemos la continuidad de f(x) en **x=1**

1) F (1) no existe (¿Por qué?)
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x \to 1}$ f(x), para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$ **(¡¡VERIFIQUELO!!),**

luego,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

3) Como f(1) no existe y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la función f(x) ***NO*** es continua en **x=1**

En conclusión, podemos afirmar:

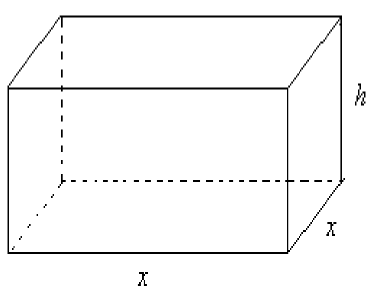
- f(x) **No** es continua para x = 0.
- f(x) **No** es continua para x = 1, pero podría serlo si redefinimos la función y tomamos f(1) = ½
- f(x) es continua para cualquier otro valor x de R

OBJ 4 PTA 4
Calcular la derivada, por definición, de la función: $2x^2 + 3x + 1$ en el punto **x= –5. Justifique su respuesta**
RESPUESTA

Consultar el modelo de respuesta 178 de fecha 21 / 01 / 2012

OBJ 5 PTA 5
Se desea construir una caja abierta sin cara superior y de base cuadrada con 108 pulgadas cuadradas de material. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo?

RESPUESTA



Volumen de la caja: $V = x^2 h$ (Función a maximizar)

Como esta función tiene dos variables (x, h) debemos usar los datos del problema para eliminar una de ellas.

El material usado se obtiene sumando el área de la base y el área de las cuatro caras laterales, así:

Área de la base: x^2 ,
Área de cada cara lateral: xh
Área total de la superficie: $S = x^2 + 4xh = 108$
Hallando h en esta ecuación tenemos:

$$4xh = 108 - x^2$$

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} \quad , \quad 0 < x < \sqrt{108}$$

Sustituyendo h en la ecuación de volumen tenemos:

$$V(x) = x^2 (\frac{108 - x^2}{4x}) = 27x - \frac{x^3}{4}$$

Derivando e igualando a cero:

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \quad , \quad 3x^2 = 108 \quad , \quad x^2 = 36 \quad , \quad x = \pm 6$$

Solo tomamos el valor positivo de x porque se trata de una longitud

Valor crítico: $x = 6$

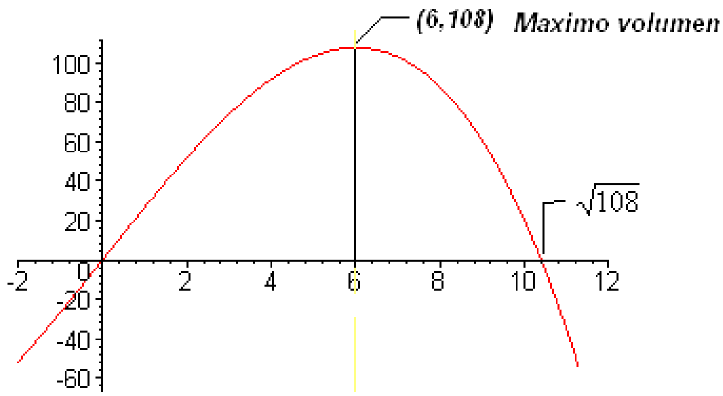
Para este valor crítico, hallemos h:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24} = 3$$

Finalmente las dimensiones de la caja son:

Longitud de la base:
$x = 6$ pulgadas y Altura de la caja: $h = 3$ pulgadas.

Volumen de la caja: $V = x^2 h = 36(3) = 108$ pulgadas cúbicas (Obsérvese la gráfica)



Nota: Usando el criterio de la segunda derivada se puede probar que, en efecto, los valores de valores de x y h corresponden al máximo volumen.

OBJ 6 PTA 6
Una empresa de muebles fabrica tres modelos de estanterías: A, B y C, en los tamaños grande y pequeño. Produce diariamente 1000 estanterías grandes y 8000 pequeñas de tipo A, 8000 grandes y 6000 pequeñas de tipo B, y 4000 grandes y 6000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos

a. Representar esta información en dos matrices

b. Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

RESPUESTA
Si las filas de la matriz representan a los tres modelos de estanterías: A, B y C y las columnas a los tamaños grande y pequeño, entonces la matriz que representa la información es:

$$M = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix}$$

De igual modo, si las filas de la matriz representan a los tamaños grande y pequeño y las columnas a los tornillos y soportes, entonces la matriz que representa la información es:

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería es:

$$M.N = \begin{pmatrix} 1000 & 8000 \\ 8000 & 6000 \\ 4000 & 6000 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112000 & 38000 \\ 200000 & 72000 \\ 136000 & 48000 \end{pmatrix}$$

OBJ 7 PTA 7

En la semana aniversario de un supermercado, un cliente ha pagado un total de 156 Bs por 24 kg de azúcar, 6 kg de queso blanco y 12 kg de papa. Además, se sabe que 1 kg de papa cuesta el triple que 1 kg de azúcar y que 1 kg de queso cuesta igual que 4 kg de papa más 4 Kg de azúcar.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el precio en Bs. de cada artículo.

b) Resolver el sistema anterior utilizando el Método de Gauss-Jordan

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

<u>RESPUESTA</u>

Sean

x= el precio en Bs de azúcar .

y= el precio en Bs de queso blanco.

z= el precio en Bs de papá.

Las ecuaciones que representan el planteamiento dado son las siguientes:

Por 24 kg de azúcar, 6 kg de queso blanco y 12 kg de papa, el cliente pagó 156 Bs:

$$24x + 6y + 12z = 156$$

1 kg de papa cuesta el triple que 1 kg de azúcar:

$$z = 3x$$

1 kg de queso cuesta igual que 4 kg de papa más 4 kg. de azúcar:

$$y = 4z + 4x$$

luego, el sistema viene representado por :

$$\begin{cases} 24x + 6y + 12z = 156 \\ z = 3x \\ y = 4z + 4x \end{cases} \quad \text{ordenando} \Rightarrow \quad \begin{cases} 24x + 6y + 12z = 156 \\ -3x + z = 0 \\ -4x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Al aplicar el método de Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones planteado se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 6 & 12 & 156 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow \frac{1}{6} f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 26 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + 4f1]{f_2 \to f_2 + 3f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & 3 & 10 & 78 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 - f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & -2 & 2 & -26 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to -\frac{1}{2} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 26 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 5 & 8 & 104 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5f_2]{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 \to \frac{1}{13} f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to f_2 + f_3]{f_1 \to f_1 - 4f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 16 \\ z = 3 \end{cases}$, es decir, el precio del kg de azúcar es de 1 Bs, el kg. de queso 16 Bs. y el kg de papa 3 Bs.

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 8

La ecuación de la demanda para el producto de un fabricante es 10p + x + 0.01 x^2 = 700 y la función de costo es C (x) = 1,000 + 0,01 x^2. Calcular la función utilidad marginal y también evaluar la utilidad marginal para:

a) x = 100 unidades b) p = 10 Bs/unidad.

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

RESPUESTA

La utilidad marginal, es la razón de cambio del valor total de la utilidad obtenida con respecto al número de unidades producidas y vendidas (Es decir, la utilidad aproximada obtenida por la fabricación y venta de una unidad adicional).

Si U(x) es la función de la utilidad total por la producción y venta de x unidades $\rightarrow \frac{dU}{dx} = U'(x)$ es la función de la utilidad marginal.

La utilidad se calcula restando: (Ingresos) – (Costos), es decir, $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso es I = px.

Por lo tanto despejamos p de la ecuación de la demanda y lo multiplicamos por x para obtener la función ingreso:

$$10p = 700 - x - 0.01x^2 \;\rightarrow\; p = 70 - 0.1x - 0.001x^2 \;\rightarrow\; I(x) = px = 70x - 0.1x^2 - 0.001x^3$$

$$U(x) = \left(70x - 0.1x^2 - 0.001x^3\right) - \left(1{,}000 + 0.01x^2\right) = -0.001x^3 - 0.11x^2 + 70x - 1{,}000$$

$$U'(x) = -0.003x^2 - 0.22x + 70\,.$$

Esta es la función utilidad marginal, para evaluarla en x = 100 simplemente sustituimos este valor de x en dicha función. Para evaluarla en p = 10 tenemos que calcular primero cuánto vale x para ese valor de p en la ecuación de la demanda:

$$10(10) + x + 0.01x^2 = 700$$

Ordenando la ecuación cuadrática nos queda: $0.01x^2 + x - 600 = 0$.

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(0.01)(-600)}}{2(0.01)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{0.02} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{0.02} = \frac{-1 \pm 5}{0.02} = \frac{4}{0.02} = 200$$

a)

$U'(100) = -0.003(100)^2 - 0.22(100) + 70 = -30 - 22 + 70$ =18 Bs/unidad adicional.

b)

$U'(200) = -0.003(200)^2 - 0.22(200) + 70 = -120 - 44 + 70$ = -94, es decir, 94 Bs /unidad extra.

OBJ 9 PTA 9

Supongamos que son tres los sectores de economía de un país: agrario, industrial y servicios. Según datos del año 1994:

1. Del sector agrario se conocen los siguientes datos estadísticos (en miles de millones): 9 en productos del propio sector, 3 del sector industrial, 1 del sector servicios; siendo la demanda total en el sector 12.
2. El sector industrial empleó: 12 en materias del sector agrario, 31 en los propios productos industriales, y 10 en servicios; la demanda final 47.
3. El sector de servicios demanda del agrario 0, del industrial 6 y del propio 5; siendo el total de la demanda en el sector 31.

   a. Construir la tabla input-output
   b. Calcular la matriz tecnológica

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

RESPUESTA

a.

		comprador			Demanda final	Output total
		1	2	3		
Vendedor	1	9	12	0	12	33
	2	3	31	6	47	87
	3	1	10	5	31	47

b. De acuerdo a los planteamientos de la pág.88 del texto Matemática II UNA, Módulo IV, la matriz tecnológica es la matriz A:

$$\begin{pmatrix} 9/33 & 12/87 & 0 \\ 3/33 & 31/87 & 6/47 \\ 1/33 & 10/87 & 5/47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,14 & 0 \\ 0,09 & 0,36 & 0,13 \\ 0,03 & 0,11 & 0,11 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 8

Demostrar utilizando el principio de Inducción Matemática que:

$$P(n) = \quad 1.5^1 + 2.5^2 + 3.5^3 + ... + n.5^n = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}, \quad n \in N$$

RESPUESTA

Demostremos que para n = 1 es verdadera.

$$P(1)= \quad 1.5^1 = \frac{5+(4-1).5^2}{16} \Rightarrow 5 = \frac{80}{16}$$ por lo tanto P(1) es verdadera

Supongamos que para n=k es verdadera.

$$P(k)= \quad 1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+k.5^k = \frac{5+(4k-1).5^{k+1}}{16}$$

Hipótesis Inductiva
(Se supone verdadera)

Debe demostrarse que siendo P(k) verdadera entonces P(k+1) es verdadera, es decir, P(k+1)=

$$1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+(k+1).5^{k+1} = \frac{5+(4k+3).5^{k+2}}{16}$$

En efecto:

De la hipótesis inductiva, se tiene:

$$1.5^1+2.5^2+3.5^3+....+k.5^k + (k+1).5^{k+1} = \frac{5+(4k-1).5^{k+1}}{16} + (k+1).5^{k+1}$$

$$= \frac{5 + (4k-1).5^{k+1} + 16.(k+1).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + \left[(4k-1) + 16.(k+1)\right].5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (4k - 1 + 16k + 16).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (20k + 15).5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (4k+3).5.5^{k+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (4k+3).5^{k+2}}{16}$$

Por tanto, P(k+1) es verdadera. Luego, por i) y ii) queda demostrado que :

P(n) = $1.5^1 + 2.5^2 + 3.5^3 + ... + n.5^n = \dfrac{5 + (4n-1).5^{n+1}}{16}$ es verdadera para $n \in N$

OBJ 9 PTA 4

En un lago artificial se introdujo cierta especie de peces. Un grupo de acuicultores estudia la evolución de esta población, la cual crece bajo la relación:

$$N(t) = N_0 e^{0,2t},$$

donde t es medido en años y N_0 es la población inicial. Determinar para qué valor de t, la población inicial se quintuplica.

RESPUESTA

Debemos hallar el valor de t para el cual $N(t) = 5N_0$, luego: $N_0 e^{0,2t} = 5N_0 \Rightarrow e^{0,2t} = 5$,
aplicando propiedades de ln :

$$\text{Ln } e^{0,2t} = \text{Ln } 5$$

Por lo tanto:

$$0,2t = \text{Ln}5 \quad , \quad t = \frac{\ln 5}{0,2} = 8,047189562$$

Luego t es aproximadamente 8,05, es decir, que en 8 años la población inicial de peces se quintuplica.

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

CC /clp.

Especialista: Chanel Chacón Evaluadora: Florymar Robles