Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Matemática II (178-179)
Cód. Carrera: 126–236–280- 508-610-611-612-613
Fecha: 14/07/2012

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 01 al 05

OBJ 01 PTA 01 Sean f, g: D$\subseteq$IR$\rightarrow$IR tales que: $\lim\limits_{x\to 1}(2f(x) - \frac{3}{2}g(x)) = \frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 1} Ln(g(x)) = 0$. Calcular usando el álgebra de límite, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

SOLUCIÓN

Al aplicar el Álgebra de Límite y las propiedades **(Ver Págs. 38 y 40. Módulo I, Matemática II UNA)** se tiene:

$$\lim_{x\to 1}\left(2f(x) - \frac{3}{2}g(x)\right) = \lim_{x\to 1} 2f(x) - \lim_{x\to 1}\frac{3}{2}g(x) = 2\lim_{x\to 1} f(x) - \frac{3}{2}\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}$$

Además:

$$\lim_{x\to 1} Ln\,(g(x)) = Ln\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right) = 0, \text{ luego } \lim_{x\to 1} g(x) = 1$$

¿Por qué?

Así:

$$\lim_{x\to 1}\left(2f(x) - \frac{3}{2}g(x)\right) = 2\lim_{x\to 1} f(x) - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \quad = 2\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

Finalmente:

$$2\lim_{x\to 1} f(x) = 2\,,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

OBJ 02 PTA 02 Resolver el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7 - x^2 + 1}{2x^7 + x^3 + 300}$

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

SOLUCIÓN:

Como el límite queda indeterminado debido a la división:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^7 - x^2 + 1}{2x^7 + x^3 + 300} = \frac{\infty}{\infty}$$

entonces, es necesario dividir entre la variable de mayor potencia tanto en el numerador como en el denominador (**Ver Pág. 57 Módulo I, Matemática II UNA)**; en este caso entre x^7:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^7-x^2+1}{x^7}}{\dfrac{2x^7+x^3+300}{x^7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^7}}{2+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{300}{x^7}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^7}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{300}{x^7}\right)}=\frac{1+0+0}{2+0+0}=\frac{1}{2}$$

Otra forma de resolver: (Ver Pág. 58 Módulo I, Matemática II UNA).

En general, si se tienen dos funciones polinómicas f(x) y g(x), de grados n y m respectivamente, dadas por:

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+....+a_nx^n$ y $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+....+b_mx^m$ $n,m\in N$, entonces al calcular el $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando se presente el caso que los grados de los polinomios f(x) y g(x) coinciden, es decir, m= n; entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_n}{b_n}$.

En el caso particular del $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$, los grados de los polinomios coinciden, es decir,

m= n = 7, con lo cual $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}=\dfrac{1}{2}$

OBJ 03 PTA 03 Hallar un intervalo [a ,b], tal que el polinomio p(x) = $5x^4-x^2+x-20$ tenga al menos una raíz en el intervalo [a ,b].

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

<u>SOLUCIÓN</u>

Consideremos la función p:IR→IR, definida por p(x) = $5x^4-x^2+x-20$. Entonces, como p es una función continua por ser un polinomio; luego por el Teorema de Bolzano, **(Ver pág.108 del texto (Módulo I)**) si encontramos dos números a y b (a < b) tales que p(a).p(b) < 0, tendríamos que el polinomio p tiene una raíz en el intervalo [a , b].

Para determinar los número a y b hagamos una tabla de valores:

x	0	1	5	-2
p(x)	–20	–15	3085	54

Como p(0).p(5) < 0, entonces el polinomio p tiene una raíz en el intervalo [0 , 5].

Observe que p(0).p(–2) <0, entonces p también tiene una raíz en el intervalo [–2 , 0].

<u>Nota:</u> Como puede notarse el intervalo en cuestión no es único. El estudiante pudiera hallar otro intervalo distinto a los encontrados por nosotros.

OBJ 04 PTA 04 Sea $h(x) = \dfrac{Ln\ x}{x^{\mathbf{m}}}$, donde m es el último dígito, no nulo, del número de su cédula de identidad. Calcular h´(x).

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

SOLUCIÓN

Para calcular esta derivada se aplica la propiedad de la derivada de un cociente (**Ver pág.57, Módulo II, Matemática II UNA)**

$$h'(x) = \left(\frac{\mathrm{Ln}\ x}{x^{\mathbf{m}}}\right)' = \frac{x^m(\mathrm{Ln}\,x)' - (x^m)'\mathrm{Ln}\,x}{(x^m)^2} = \frac{x^m / x - mx^{m-1}\mathrm{Ln}\,x}{x^{2m}}$$

$$= \frac{x^{m-1} - mx^{m-1}\mathrm{Ln}\,x}{x^{2m}}$$

$$= \frac{x^{m-1}(1 - m\mathrm{Ln}\,x)}{x^{2m}} = \boxed{\frac{1 - m\mathrm{Ln}\,x}{x^{m+1}}}$$

Ahora, solo basta sustituir **m** por su valor. Por ejemplo, si **m = 7** tenemos: $h'(x) = \dfrac{1 - 7\mathrm{Ln}\,x}{x^8}$. El estudiante puede hacer la sustitución del valor de **m** al principio y luego calcular la derivada de h.

OBJ 05 PTA 05 Sean f, g: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funciones definidas por $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Utilice la regla de la cadena para calcular la derivada de la función compuesta $g_o f$ en el punto $x = 2$.

JUSTIFIQUE SU RESPUESTA

SOLUCIÓN

Como la función f es derivable en x = 2 y la función g es derivable en y = f(2) = 8, tenemos que $g_o f$ es derivable **(Ver pág. 62 del texto (Módulo II))** en x = 2 y $(g_o f)'(2) = g'(f(2))f'(2)$.

Ahora bien, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y $f'(x) = 3x^2$, entonces: $(g_o f)'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{8}}(12) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

FIN DEL MODELO

Este modelo se elaboró para uso de asesores y estudiantes, debe servir como material para la retroalimentación de los estudiantes.

Especialista: Chanel Chacón

Validador: Eddie Mogollón
Evaluadora: Florymar Robles