Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)

Cód. Carrera: 610-612-613-508
280-236-126

Fecha: 19-10-2013

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 5

OBJ 1 PTA 1 Sean f, g : D $\subseteq$ R $\rightarrow$ R tales que, $\lim\limits_{x\to 1}\left(2f(x)-\frac{3}{2}g(x)\right)=\frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 1}\ln(g(x))=0$, usando álgebra de límite, calcular $\lim\limits_{x\to 1} f\,(x)=0$.

SOLUCIÓN:
El álgebra de límites consiste en aplicar las propiedades de límite, en nuestro caso:

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 1}\left(2f(x)-\frac{3}{2}g(x)\right)=\lim_{x\to 1}(2f(x))-\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{2}g(x)\right)=2\lim_{x\to 1}(f(x))-\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}(g(x)). \qquad (1)$$

Pero como por hipótesis tenemos que:

$$0=\lim_{x\to 1}\ln(g(x))=\ln\left(\lim_{x\to 1}g(x)\right).$$

Luego,

$$e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 1}g(x)\right)}=e^{0}\rightarrow\lim_{x\to 1}g(x)=0.$$

Al retomar (1), tenemos que:

$$\frac{1}{2}=\lim_{x\to 1}(2f(x))\rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=1.$$

OBJ 2 PTA 2 Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}.$$

SOLUCIÓN:

Primero se evalúa el límite para saber a qué forma indeterminada nos enfrentamos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty+\sqrt{\infty}}+\sqrt{\infty}}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Este tipo de formas indeterminadas se acostumbra a dividir entre el término de mayor exponente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1}=\frac{1}{2}$$

¿Por qué?

OBJ 3 PTA 3 Dada la función f(x) definida por

$$f\ (x)=\begin{cases} e^{ax} & \text{si } x\le 0 \\ x+2a & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Determinar el valor del parámetro a para que f(x) sea continua en x = 0.

SOLUCIÓN:

En este caso, estudiaremos la continuidad de la función para $x_0 = 0$, tomando en consideración que el parámetro a es cualquier número real, así:

$$f\ (0) = \lim_{x\to a^-} f\,(x)=\lim_{x\to a^+} f\,(x)\,.$$

Ahora bien, f (0) = e^0= 1. Observe que este valor es independiente del parámetro a. Calcularemos los límites,

$$\lim_{x\to a^-} f\,(x)=\lim_{x\to a^-} e^{ax}=e^0=1 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a^+} f\,(x)=\lim_{x\to a^-} x+2a=2a \qquad (2)$$

Al igualar las expresiones anteriores, obtenemos que el valor de a = $\frac{1}{2}$.

¿Por qué?

OBJ 4 PTA 4 Calcular la derivada de la función f(x) = $3^x\cos\left(x^2-1\right)$.

SOLUCIÓN:

En este caso, estamos en presencia del producto de dos funciones. Por lo tanto, se aplica la fórmula de la derivada de un producto.

$$f\,'(x) = \left(3^x\right)'\cos\left(x^2-1\right)+\left(3^x\right)\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)'. \qquad (1)$$

Por otra parte,

¿Por qué?

$$\left(3^x\right)' = 3^x\ \ln(3)$$

$$\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)' = -\left(x^2-1\right)\left(\text{sen}\left(x^2-1\right)\right)$$

Si sustituimos en (1), obtenemos:

$$f\,'(x) = \left(3^x\right)\left[\ln(3)\left(\cos\left(x^2-1\right)\right)\right]-(2x)\left(\text{sen}\left(x^2-1\right)\right)$$

¡Justifique los cálculos!

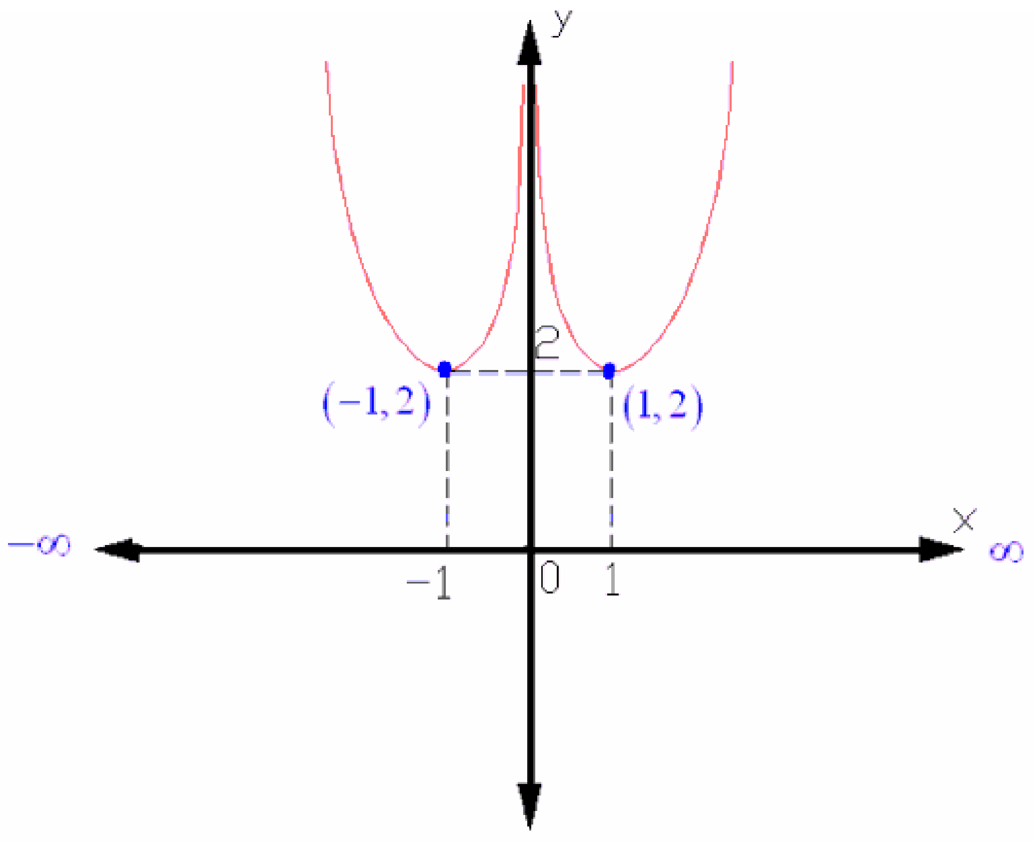
OBJ 5 PTA 5 Realizar el estudio completo de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}.$$

RESPUESTA

Para realizar el estudio completo de la función, procederemos a analizar cada uno de los siguientes aspectos:

Dominio y Rango	Dominio R - $\{0\}$ Rango R - $\{0\}$
Continuidad	Discontinua en x = 0
Periodicidad	No es periódica
Simetría	Simétrica respecto de el eje y por ser par
Puntos de cortes con los ejes	No posee cortes con los ejes
Signo de la función	Siempre es positiva
Asíntotas	Posee solo una asíntota vertical, la recta x = 0
Monotonía	No
Máximos	No
Mínimos	(1,2) y (- 1,2)
Intervalos de Crecimiento	$(-1,0) \cup (1,\infty)$
Intervalos de Decrecimiento	$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
Curvatura	No posee puntos de inflexión. La curva siempre es cóncava hacia arriba



¡Justifique los cálculos!

FIN DEL MOLEDO.