Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemática II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 610, 612, 613, 508, 280, 236, 126
Fecha: 23-11-2013

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos del 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Construye la isometría, que no es una rotación, que transforma al vector (1,0) en el vector $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

SOLUCIÓN:
Para dar respuesta a esta pregunta debes consultar el libro texto UNA (cód 178 - 179) módulo III, Autoevaluación, Pág. 94, Parte III, ejercicio 3.

OBJ 7 PTA 2 Calcule, por el método de Gauss–Jordan, la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN:

Paso 1: Construir una matriz del tipo M = (A | I)

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Paso 2: Utilizar el método Gauss–Jordan para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.

$$\xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

EDUCACIÓN MENCIÓN MATEMÁTICA, INGENIERÍA INDUSTRIAL, INGENIERÍA DE SISTEMA Y MATEMÁTICA CÓD 179.

OBJ 8 PTA 3 Demostrar que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por x + y

SOLUCIÓN:

La proposición es cierta para $n = 1$, ya que:

$$x^{2\cdot 1} - y^{2\cdot 1} = x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$$

Supongamos ahora que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$. Queremos demostrar que también $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ es divisible por $x + y$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} &= x^{2n+2} - y^{2n+2} \\ &= x^{2n}x^2 - y^{2n+2} \end{aligned}$$

Luego agregando términos a conveniencia

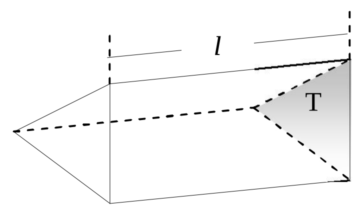
$$\begin{aligned} &= (x^{2n} + \underbrace{y^{2n} - y^{2n}}_{0})x^2 - y^{2n+2} \\ &= (x^{2n} - y^{2n})x^2 + y^{2n}x^2 - y^{2n+2} \\ &= (x^{2n} - y^{2n})x^2 + y^{2n}(x^2 - y^2) \end{aligned}$$

Nótese que el primer termino es divisible por x + y (usando la hipótesis inductiva), mientras que el segundo también lo es, puesto que $x^2 + y^2 = (x + y)(x - y)$. Por tanto estas afirmaciones completan nuestra demostración.

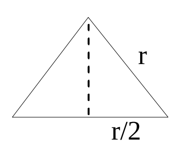
OBJ 9 PTA 4 El volumen V de un prisma, como el de la figura anexa, viene dado por la función:

$$V = \text{área}(T).\ l,$$

donde T es cualquiera de los triángulos laterales. Supongamos que el triángulo T es un triángulo equilátero de lado r y que $\boldsymbol{l}$ = 16 cm. Calcule la tasa de variación instantánea de V respecto de r.



SOLUCIÓN:



Como T es un triángulo equilatero de lado r el área de T es:

$$\text{área}(T) = r/2\left(\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

Luego el volumen V, está dado por:

$$V = 16\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = 4\sqrt{3}\,r^2$$

La tasa de variación instantánea de V respecto de r es :

$$V'(r) = \frac{dV}{dr} = (4\sqrt{3}\,r^2)' = 8\sqrt{3}\,r$$

CONTADURÍA, ADMINISTRACIÓN PÚBLICA, ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS CÓD 178

OBJ 8 PTA 3 La ecuación de la demanda de un cierto bien está dada por la relación $p = \dfrac{100}{q^2+1}$.

A continuación te presentamos dos cuadros. En el cuadro A, encontraras seis expresiones matemáticas que dependen de la función de ingreso dada anteriormente. En el cuadro B, se te presentan las posibles funciones que definen las expresiones señaladas en el cuadro A. Debes completar en el cuadro B, llenando los espacios subrayados, con la letra que se corresponda a alguna de las seis opciones dadas en el cuadro A.

CUADRO A

A. $\dfrac{100}{q^2+1}$	**B.** $\dfrac{100(1-q^2)}{\left(q^2+1\right)^2}$
C. $\dfrac{100(1-q)}{q^2+1}$	**D.** $\dfrac{100\,q^2}{q^2+1}$
E. $\dfrac{100}{q+1}$	**F.** $\dfrac{100\,q}{q^2+1}$

CUADRO B

1. Función de Ingreso ______

2. Función de Ingreso medio ______

3. Función de Ingreso marginal ______

SOLUCIÓN:

1. La función de ingreso I(q), se obtiene multiplicando el precio unitario de venta "p" por el número de unidades a vender "q", es decir:

$$I(q) = pq = \frac{100}{q^2+1}\,q = \frac{100\,q}{q^2+1}\ .$$

Opción correcta **F**

2. La función de ingreso medio es:

$$\overline{I}(q) = \frac{I(q)}{q} = \frac{\frac{100\,q}{q^2+1}}{q} = \frac{100}{q^2+1}\ , \quad q > 0.$$

Opción correcta **A**

3. La función de ingreso marginal es:

$$I'(q) = \frac{dI}{dq} = \frac{100\left(q^2+1\right) - 2q.100\,q}{\left(q^2+1\right)^2} = \frac{100(1-q^2)}{\left(q^2+1\right)^2}$$

Opción correcta B

OBJ 9 PTA 4 Considere una economía formada por cuatro industrias cuya la matriz tecnología es:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Determine si se cumplen las condiciones de competitividad.

RESPUESTA

Veamos si se cumplen las condiciones de compatibilidad expuestos en la pág 83 del texto, Módulo IV.

Como todos los coeficientes de la matriz de tecnología están en el intervalo [0 ,1), se cumple la primera condición de compatibilidad. Para verificar que se cumple la segunda condición debemos determinar si todos los menores de la matriz $I_3 - A$ son positivos.

$(I - A)_{11} =$ 0,2, el cual es positivo.

$$\det\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} = 0,06 > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = 0,008 > 0$$

Por lo tanto, todos los menores principales de la matriz tecnológica A son positivos y en consecuencia se cumple la segunda condición de compatibilidad.

FIN DEL MODELO