Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)

Cód. Carrera: 610 - 612 - 613 - 508
280 - 236 - 126

Fecha: 10 – 05 – 2014

MODELO DE RESPUESTAS

Objetivos 01 al 05

OBJ 1 PTA 1 Calcular el siguiente $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(\dfrac{3x - x^2}{5x + 3} + 2x(x-1) \right)$, usando el álgebra de límites.

Nota: Recuerda que para aplicar el álgebra de límite debes verificar primero la existencia de los límites involucrados.

SOLUCIÓN:

Como

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (3x - x^2) = \frac{5}{4}$$ (ver pág. 40 del Material Instrucional, Módulo I)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (5x+3) = \frac{11}{2}, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x) = 1, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}} (x-1) = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, usando el álgebra de límites (ver pág.38 del del Material Instrucional, Módulo I), resulta:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{3x - x^2}{5x + 3} = \frac{5}{22}$$ **[1]** (¿Por qué?)

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} 2x(x-1) = -\frac{1}{2}.$$ **[2]** (¿Por qué?)

Al emplear nuevamente el álgebra de límites y los resultados de [1] y [2], obtenemos que:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{3x - x^2}{5x + 3} + 2x(x-1) \right) = -\frac{3}{11}$$

OBJ 2 PTA 2 Calcular $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8}$

SOLUCIÓN:

Al evaluar el límite obtenemos la indeterminación del tipo 0/0. Para eliminarla hagamos un cambio de variable.

Sea x = u^3, de donde u = $\sqrt[3]{x}$, cuando x $\to$ 8 tenemos que u $\to$ 2, luego:

$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8} = \lim\limits_{u \to 2} \dfrac{\sqrt{7+u}-3}{u^3-8}$, multipliquemos y dividamos por la conjugada de $\sqrt{7+u}-3$:

$$\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{7+u}-3}{u^3-8} = \lim_{u \to 2} \frac{(\sqrt{7+u}-3).(\sqrt{7+u}+3)}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)} = \lim_{u \to 2} \frac{(\sqrt{7+u})^2-(3)^2}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)}.$$

$$\lim_{u \to 2} \frac{7+u-9}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)} = \lim_{u \to 2} \frac{u-2}{(u^3-8).(\sqrt{7+u}+3)} .$$

Al factorizar el polinomio (u^3-8), se obtiene:

$\lim\limits_{u \to 2} \dfrac{\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}.(u^2+2u+4).(\sqrt{7+u}+3)}$, simplificando ($u-2$).

$$\lim_{u \to 2} \frac{1}{(u^2+2u+4).(\sqrt{7+u}+3)} = \frac{1}{(4+4+4).(3+3)} = \frac{1}{72}.$$

Finalmente,

$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{7+\sqrt[3]{x}}-3}{x-8} = \frac{1}{72}.$$

OBJ 3 PTA 3 Representar gráficamente la función r : (−2 , 2]→IR, definida por la expresión: r(t) = | [t] | e indicar los puntos donde r **no es continua**.

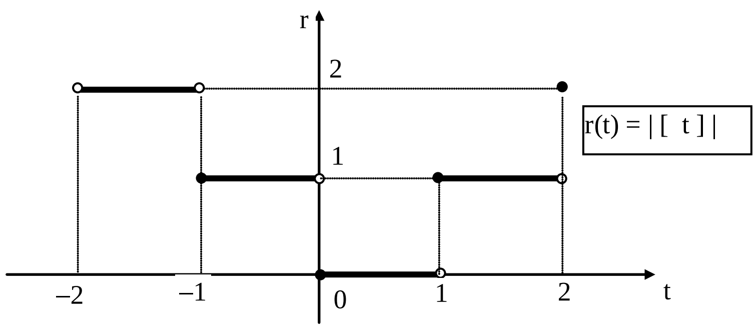
Nota: [ ] denota la función parte entera y | | la función valor absoluto

SOLUCIÓN:

Si observamos la definición de r, podemos notar que r es constante en cada uno de los intervalos (−2 , −1) , [−1 , 0) , [0 , 1) y [1 , 2), específicamente tenemos que:

$$r(t) = \begin{cases} |-2| & , \quad -2 < t < -1 \\ |-1| & , \quad -1 \le t < 0 \\ |\ 0\ | & , \quad 0 \le t < 1 \\ |\ 1\ | & , \quad 1 \le t < 2 \\ |\ 2\ | & , \quad 2 \end{cases} = \begin{cases} 2 & , \quad -2 < t < -1 \\ 1 & , \quad -1 \le t < 0 \\ 0 & , \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & , \quad 1 \le t < 2 \\ 2 & , \quad 2 \end{cases}$$

De esta manera, la gráfica de r es la siguiente:



De acuerdo con la gráfica los puntos donde **r no es continua** en el intervalo (–2 , 2] son:

$$t = \{ -1, 0,1,2\}.$$

OBJ 4 PTA 4 Calcular $g'(\pi)$ y $g'(\pi/2)$, donde $g(x) = \cos(\text{sen } x)$, empleando la regla de la cadena.

SOLUCIÓN:
Al aplicar la Regla de la Cadena, ver pág. 62 del Material Instrucional, Módulo I

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\cos(\text{sen } x))' \\ &= -\text{sen } (\text{sen } x)\ (\text{sen } x)' \\ &= -\text{ sen } (\text{ sen } x\ )\ \cos x. \end{aligned}$$

Luego,

$$g'(\pi) = -\text{sen } (\text{sen } \pi)\ (\cos \pi) = -\text{sen}(\ \text{sen}(0))\ \cos 0 = 0.$$
$$g'(\pi/2) = -\text{sen } (\text{sen } (\pi/2))\ (\cos\ (\pi/2)) = 0.$$

OBJ 5 PTA 5 Sea $m:[0,1] \to IR$ la función definida por $m(x) = x^3 + 2x - 1$. Verificar, si m cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo [0 , 1], y en caso de ser posible, calcular explícitamente el (los) punto(s) $x_o \in [0,1]$ que verifica(n) el teorema.

SOLUCIÓN:

Como la función m es continua en el intervalo [0 , 1] (*¿por qué*?) y derivable en el intervalo abierto (0 , 1) (*¿por qué*?), entonces m cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio o Teorema de Lagrange en el intervalo [0 , 1] (ver pág 126 del texto (módulo II)), luego existe al menos un $x_0 \in (0 , 1)$, tal que:

$$m'(x_0) = \frac{m(1) - m(0)}{1 - 0} \qquad [1]$$

Puesto que $m'(x) = 3x^2 + 2$, $m(1) = 2$, $m(0) = -1$, de [1] resulta: $3x_0^2 + 2 = 3$. Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{o} \quad x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como $x_0 \in (0\ ,\ 1)$, necesariamente el único punto que verifica el TVM es $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

FIN DEL MODELO.