Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemática II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 610, 612, 613, 508, 280, 236, 126
Fecha: 14 - 06 - 2014

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos del 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Supóngase que un contratista ha aceptado pedidos por cinco casas de estilo ranchero, siete casas de estilo campero y doce casas de estilo colonial. Los pedidos pueden representarse mediante la siguiente matriz renglón:

$$\mathbf{Q} = [5 \;\; 7 \;\; 12].$$

Supóngase además, que las materias primas y laborales que se utilizan en cada uno de los tipos de construcción son: acero (A), madera (M), vidrio (V), pintura (P) y mano de obra (MO). Los elementos de la matriz **R** que aparecen más abajo representan el número de unidades de cada uno de los materiales que se necesitan para la construcción de cada uno de los tres tipos de casa.

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ \text{Ranchero} \\ \text{Campero} \\ \text{Colonial} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{M} & \text{V} & \text{P} & \text{MO} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Calcule la cantidad de cada uno de los materiales que necesita el contratista para cumplir los contratos.

Solución:

La respuesta al planteamiento es muy sencilla, pues la información solicitada viene dada por el producto de la matriz renglón **Q** por la matriz **R**, esto es:

$$\boxed{\mathbf{QR} = [5 \;\; 7 \;\; 12]\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} = [146 \;\; 526 \;\; 260 \;\; 158 \;\; 388]}$$

En consecuencia, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 unidades de madera, 260 unidades de vidrio, 158 unidades de pintura y 388 obreros.

OBJ 7 PTA 2 Aplicar el método de Gauss - Jordan en la resolución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Solución:

Antes de comenzar a aplicar el método de Gauss - Jordan en la resolución del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, escribámoslo en forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix},$$

Comencemos ahora con el método de Gauss – Jordan.

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales por filas a la matriz para llevarla de esta forma a una matriz triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-1*F_1 + F_3 \to F_3]{-2*F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-2*F_2 + F_3 \to F_3]{1*F_2 + F_1 \to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

De la matriz anterior resulta que la solución al sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es:

$$\boxed{x = -3, \quad y = 1, \quad z = 0}$$

Paso 3: Verifique que los valores hallados son efectivamente solución del sistema de ecuaciones. Este paso no es parte del ejercicio, es solo una recomendación

CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN CÓD. 178

OBJ 8 PTA 3 Una tienda fabrica y vende un producto en Bs 2.550 cada unidad, sus costos fijos mensuales ascienden a Bs 105.000 y sus costos variables representan mensualmente el 30% de sus ingresos por venta del producto.

a) Deducir la función que define el costo total en función del número x de unidades mensualmente vendidas.

b) Determinar el número de unidades que debe producir y vender para cubrir los costos fijos y para cubrir los costos totales.

c) Determinar cuántas unidades debe producir y vender para obtener una utilidad mensual de Bs 2.450.000.

Solución:

Sea x el número de unidades producidas y vendidas por la tienda.

a) El costo total viene expresado como la suma de los costos variables y los costos fijos, es decir:

$$C_T(x) = C_V(x) + C_f,$$

donde los costos variables en este caso, vienen dados por:

$$C_V(x) = 30\%I(x) = 30\%(p.x) = 30\%(2.550x) = 765x,$$

y los costos fijos:

$$C_f = 105.000.$$

Al sustituir C_V y C_f en la expresión que define a C_T , tenemos:

$$C_T(x) = 765x + 105.000.$$

b) Para cubrir los costos totales, debemos hallar el punto de equilibrio, pues es en este punto, donde los costos totales se hacen iguales a los ingresos, de aquí que:

$$C_T(x) = I(x)$$

$$765x + 105.000 = 2.550x$$

$$1785x = 105.000$$

$$\boxed{x = 58{,}8235 \approx 59.}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente:

Dado que el 30% de los ingresos es para cubrir los costos variables, tenemos entonces que el 70% restante debe ser utilizado para cubrir los costos fijos de Bs 105.000, por lo tanto:

$$(70\%).I(x) = C_f = 105.000$$

$$0{,}7(2.550x) = 105.000$$

$$\boxed{x = 58{,}8235 \approx 59.}$$

c) Tenemos por definición que:

$$U(x) = I(x) - C_T(x),$$

por lo tanto,

$$U(x) = 1.785x - 105.000.$$

Queremos hallar x de tal manera que:

$$2.450.000 = 1.785x - 105.000 \quad \Rightarrow \quad 1.785x = 2.555.000.$$

De aquí que:

$$\boxed{x = \frac{2.555.000}{1.785} \approx 1.431{,}37255 \approx 1.431.}$$

OBJ 9 PTA 4 La interacción de cierta economía formada por las industrias A, B y C está dada por la siguiente tabla:

	A	B	C	Demanda sector externo
A	240	180	144	36
B	120	36	48	156
C	120	72	48	240

Determinar la matriz tecnológica y la matriz de Leontief.

Solución:

Como los valores totales de producción para las industrias A, B y C son 600, 360 y 480 respectivamente, tenemos que la matriz tecnológica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{240}{600} & \frac{180}{360} & \frac{144}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{36}{360} & \frac{48}{480} \\ \frac{120}{600} & \frac{72}{360} & \frac{48}{480} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

La matriz de Leontief es

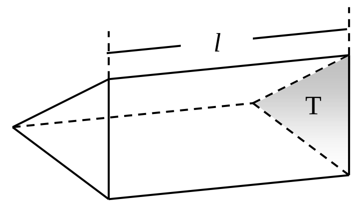
$$\mathbf{I - A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}.$$

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA CÓD. 179

OBJ 8 PTA 3 Demostrar que: Cualquiera que sea el número natural n se verifica que el número $7^n + 5^n$ es par.

Solución:
Ver el ejemplo N° 1 de la página 80 del Módulo IV código 179 de la asignatura Matemática II.

OBJ 9 PTA 4 El volumen V de un prisma, como el de la figura que se presenta, viene dado por la función: V = área(T).l, donde T es cualquiera de los triángulos laterales. Supongamos que el triangulo T sea un triángulo equilatero de lado **r** y que **l** = 16 cm.



Calcular la tasa de variación instantánea de V respecto de **r**.

Solución:
El área de cualquier triángulo es base por altura entre dos, en particular T es un triángulo equilatero de lado **r**, por lo tanto su área es:

$$\text{área(T)} = \frac{r\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}}{2} = r^2\frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3$$

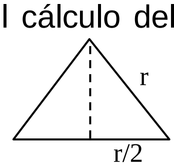
Luego, el volumen V está dado por:

$$V = 16r^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\,r^2\ \text{cm}^3$$

La tasa de variación instantánea, a que hace referencia el enunciado de la pregunta no es mas que la derivada de V respecto de **r**, por lo tanto:

$$\boxed{V'(\mathbf{r}) = \frac{dV}{dr} = (4\sqrt{3}\,r^2)' = 8\sqrt{3}\,r.}$$

Aclaratoria:
El numerador de la fracción que aparece en el cálculo del área de T, sale de la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo



FIN DEL MODELO.