Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)

Cód. Carrera: 610–612–613-508-280
281–236–237-126

Fecha: 26 – 07 – 2014

MODELO DE RESPUESTAS

Objetivos 01 al 09

OBJ 1 PTA 1 Sean *f*, *g*: D$\subseteq$ IR $\to$ IR y x_0 un punto límite de D, tales que, $\lim\limits_{x\to x_0} 2f(x) - \frac{3g(x)}{5} = \frac{3}{2}$ y $\lim\limits_{x\to x_0} 4g(x) = -1$. Calcula el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

SOLUCIÓN:
Consultar el libro texto UNA (código 178 - 179). Autoevaluación I, ejercicio 1, página 123.

OBJ 2 PTA 2 Evalúa el $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\cot(\pi\ \theta)\ \text{sen}\,\theta}{2\sec\theta}\right)$.

SOLUCIÓN:
$\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\frac{\cot(\pi\,\theta)\ \text{sen}\theta}{2\sec\theta}\right) = 0\ .\ \infty$, aplicando el álgebra y las identidades trigonométricas levantamos la indeterminación, así:

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cot(\pi\,\theta)\,\text{sen}\theta}{2\sec\theta}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\cos(\pi\,\theta)}{\text{sen}(\pi\,\theta)}\ \text{sen}\theta}{2\ \frac{1}{\cos\theta}}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos(\pi\,\theta)\,\text{sen}\theta\text{en}\theta\theta}{2\ \text{sen}(\pi\,\theta)}\right).$$

Al dividir por $\pi\,\theta$ miembro a miembro

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos(\pi\,\theta)*\frac{\text{sen}\theta}{\pi\,\theta}\cos\theta}{2\ \frac{\text{sen}(\pi\,\theta)}{\pi\,\theta}}\right) = \frac{1}{2\pi}$$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\cos(\pi\theta)$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta$ y $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}(\pi\theta)}{\pi\theta}$ existen y son finitos **¡Verifícalo!**. Por lo tanto, se puede aplicar la propiedad del producto de los límites.

Especialista: Profa. Chanel Chacon

Validador: Profa. Alejandra Lameda
Evaluadora: Profa. Florymar Robles

OBJ 3 PTA 3 Establezca si la función $r(t)=\begin{cases} \dfrac{t^3-27}{t-3} & \text{si } t \neq 3 \\ 27 & \text{si } t = 3 \end{cases}$ es continua en t = 3.

SOLUCIÓN:
Veamos si se cumple $\lim\limits_{t\to 3} r(t)$ = r (3).

$$\lim_{t\to 3} \frac{t^3-27}{t-3} = \lim_{t\to 3} \frac{(t-3)(t^2+3t+9)}{t-3} = \lim_{t\to 3} (t^2+3t+9) = 9 + 9 + 9 = 27$$

$$\therefore \lim_{t\to 3} r(t) = r\,(3) \Rightarrow r \text{ es continua en } t = 3$$

OBJ 4 PTA 4 La función posición de un objeto en caída libre viene dada por la expresión $s(t) = -16\,t^2 + 1362$. Si se deja caer desde una altura de 1362 m. Hallar la velocidad

a) media en el intervalo [1, 2].

b) en el instante t =2.

Nota: Para el logro de este objetivo debes responder correctamente todos los literales.

SOLUCIÓN:
Para t = 0 $s(0) = -16\,(0)^2 + 1362 \Rightarrow s(0) = 1362$ m de altura.
La función posición $s(t) = -16\,t^2 + 1362$ y velocidad $v(t) = s'(t) = -32\,t + v_0$; $v_0 = 0$.

a) En el intervalo [1, 2] el objeto cae desde una altura $s(1) = -16\,(1)^2 + 1362 = 1346\text{m}$ hasta una altura de $s(2) = -16\,(2)^2 + 1362 = -64 + 1362 = 1298\text{m}$.

La velocidad media es $Vm = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{1298-1346}{2-1} = -48\text{m/s}$.
Vm= – 48 m/s. En el intervalo [1, 2] el objeto se mueve hacia abajo a razón 48 m/s.

b) La velocidad en el instante t viene dada por la derivada $s'(t) = -32\,t$, luego en t = 2 $s'(2) = -64$ m/s

Por tanto, en t = 2 el objeto se mueve a razón de 64 m/s hacia abajo.

OBJ 5 PTA 5 Dada la función f: R → R definida por $f(x)=\dfrac{3x^5-20x^3}{32}$, determine:

a) Puntos de inflexión.
b) Intervalos de concavidad y convexidad.

Nota: Para el logro de este objetivo debes responder correctamente todos los literales.

SOLUCIÓN:

$$f'(x)=\frac{15x^4-60x^2}{32} \text{ y } f''(x)=\frac{60x^3-120x}{32} \Rightarrow f''(x)=0 \Leftrightarrow 60x^3-120x=0$$

$\Leftrightarrow 60x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

Intervalo	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
Punto de prueba	$x=-3$	$x=-1$	$x=1$	$x=3$
Signo de $f''(x)$	$f''(-3)<0$	$f''(-1)>0$	$f''(1)<0$	$f''(3)>0$
Conclusión	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba(convexa)	Cóncava	Convexa

OBJ 6 PTA 6 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}$.

Encuentre una matriz D tal que, A + B + C + D es la matriz cero de 3x3.

SOLUCIÓN:

Sea la matriz $D=\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}$. Entonces, según las condiciones se debe cumplir:

A + B + C + D = 0_{3x3}, sustituyendo los valores correspondientes en la expresión anterior, tenemos:

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&4&5\\0&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&1\\3&0&5\\7&-6&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&2\\3&1&0\\0&-2&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Luego, por suma de matrices:

$$\begin{pmatrix}1+a&1+b&5+c\\9+a_1&5+b_1&10+c_1\\7+a_2&-7+b_2&3+c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{ por igualdad de matrices.}$$

$$\left.\begin{array}{r}1+a=0\\1+b=0\\5+c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a=-1\\b=-1\\c=-5\end{array}\qquad\left.\begin{array}{r}9+a_1=0\\5+b_1=0\\10+c_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a_1=-9\\b_1=-5\\c_1=-10\end{array}\qquad\left.\begin{array}{r}7+a_2=0\\-7+b_2=0\\3+c_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}a_2=-7\\b_2=7\\c_2=-3\end{array}$$

De acuerdo con lo anterior la matriz $D=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -5\\ -9 & -5 & -10\\ -7 & 7 & -3\end{pmatrix}$.

OBJ 7 PTA 7 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, usando el método de Gauss-Jordan, calcule A^{-1} si existe.

SOLUCIÓN:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f1\to\frac{1}{2}f1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f2\to f2-4f1}\xrightarrow[f3\to f3-3f1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f2\to-\frac{1}{3}f2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -5 & -11 & -\frac{3}{2} & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f1\to f1-2f2}\xrightarrow[f3\to f3+5f2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -1 & \frac{11}{6} & -\frac{5}{3} & 1\end{array}\right)\xrightarrow{f3\to-f3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -\frac{5}{6} & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1\end{array}\right)\xrightarrow{f1\to f3+f1}\xrightarrow[f2\to-2f3+f2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1\end{array}\right).$$

Luego, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1\\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2\\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1\end{pmatrix}$ y se puede comprobar $A\cdot A^{-1}=I_{3x3}$. (Realice los cálculos)

ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA (CÓD. 178)

OBJ 8 PTA 8 La función de la demanda de un cierto bien en un mercado de competencia está dada por la relación $Q = 400 - 0.5\,p^2$. Determina si la demanda es elástica, inelástica o ni lo uno ni lo otro para p = 20.

SOLUCIÓN:
La respuesta relativa de los consumidores a un cambio en el precio de un bien de consumo se llama la "elasticidad de precios de la demanda", la denotaremos por: $\eta = \dfrac{\frac{Q}{p}}{\frac{dQ}{dp}}$ **[1].**

Al derivar la función de la demanda, tenemos $\dfrac{dQ}{dp} = -p$. Luego, sustituyendo en **[1]:**

$$\eta = \frac{\frac{400}{p} - 0.5p}{-p} = -\frac{400}{p^2} + 0.5 \quad \text{y} \quad \text{para} \quad p=20 \quad \eta = -1 + 0.5 = -0.5 \ \text{ y } \ |\eta| = 0.5 < 1.$$

Luego, tenemos como conclusión $\boxed{|\eta| = 0.5 < 1}$ la demanda es inelástica.

OBJ 9 PTA 9 Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el vector de demanda d = (30 20 40 10), una matriz 1x 4. El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el vector de precios (en miles de Bs.) $p = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$ una matriz 4x1. Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

SOLUCIÓN:

De acuerdo a la definición, el ingreso viene dado por: $I = (30 \quad 20 \quad 40 \quad 10).\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

Al efectuar el producto de matrices, tenemos:

$$I = 30(20) + 20(15) + 40(18) + 10(40) = 600+300+720+400 = 2020 \text{ miles de } B^s.$$

Luego, el fabricante recibirá 2020 miles de B^s.

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA (CÓD 179)

OBJ 8 PTA 8 Demuestre que $|\text{sen } nx| \le n|\text{sen } x|$, para todo $x \in R$, $n \in Z^+$.

SOLUCIÓN:

i) $n = 1$ $\quad |\text{sen } x| \le |\text{sen } x|$ se cumple

ii) $n = k$ $\quad |\text{sen } kx| \le k|\text{sen } x|$ hipótesis de inducción

iii) $n = k+1$ $\quad |\text{sen } (k+1)x| \le (k+1)|\text{sen } x|$ tesis P.D.

Como

$$|\text{sen } (k+1)x| = |\text{sen } (kx + x)| = |\text{sen } kx \cdot \cos x + \cos kx \cdot \text{sen } x|$$

$$\le |\text{sen } kx| \cdot |\cos x| + |\cos kx| \cdot |\text{sen } x| \le |\text{sen } kx| + |\text{sen } x| \le k|\text{sen } x| + |\text{sen } x| = (k+1)|\text{sen } x|$$

$$\therefore \quad |\text{sen } (k+1)x| \le (k+1)|\text{sen } x|$$

Nota: Estas desigualdades puedes comprobarlas, por ejemplo, haciendo $k = 2$, $x = 30º = \frac{\pi}{6}$

$$\text{sen } 60 \cdot \cos 30 + \cos 60 \cdot \text{sen } 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$|\text{sen } 60| \cdot |\cos 30| + |\cos 60| \cdot |\text{sen } 30| = 1 \le |\text{sen } 60| + |\text{sen } 30| = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.36$$

OBJ 9 PTA 9 Considera la función $\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$ que expresa el volumen **V** de una esfera en función de su radio **r.** Determina la tasa media de cambio $\frac{\mathbf{\Delta V}}{\mathbf{\Delta r}}$ cuando el radio pasa de 4 cm a 4,5 cm.

SOLUCIÓN:

Ver pág.106 y 121-122 del texto (Módulo IV).

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r}$$, donde $r = 4$ cm y $\Delta r = (4,5 – 4)$ cm $= 0,5$ cm.

Entonces,

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{V(4 + 0,5) - V(4)}{0,5} = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{(4+0,5)^3 - 4^3}{0,5}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{4^3 + 3.4^2(0,5) + 3.4(0,5)^2 + (0,5)^3 - 4^3}{0,5}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{3.2.4+3+(0,5)^3}{0,5}\right] = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{27+\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{217}{4}\right) = \frac{217\pi}{3} \approx 227,24 \; .$$

Por lo tanto, la *tasa media de cambio* $\frac{\boldsymbol{\Delta V}}{\boldsymbol{\Delta r}}$ cuando el radio pasa de 4 cm a 4,5 cm es aproximadamente 227,24 cm^3.

FIN DEL MODELO.