Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemática II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 126-236-237-280-281 508-610-612-613
Fecha: 22-11-2014

MODELO DE RESPUESTAS

Objetivos del 1 al 5

OBJ 1 PTA 1

A continuación enunciamos varias proposiciones relacionadas con límites de funciones. Indique con V o F en los espacios destinados para tal fin, si la proposición es verdadera o falsa.

a. Si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$ si $x \neq 0$ y $f(x) = 0$ si $x = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ ______

b. Si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ ______

c. Si $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ ______

Nota: Para lograr el objetivo debe responder correctamente todas las partes de la pregunta.

Solución:

a. Si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$ si $x \neq 0$ y $f(x) = 0$ si $x = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ F, ya que si nos acercamos 0 tanto por la derecha como por la izquierda los valores de f se aproximan más y más a 1.

b. Si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ V

c. Si $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ es la función definida por $f(x) = x^2 + 1$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ V

Comentario: Es importante notar que en estas 3 proposiciones a pesar de la función ser la misma, y el punto donde se estudia el límite ser el mismo, la respuesta no es la misma. El hecho de que el punto de estudio no pertenezca al dominio de f no tiene incidencia en la existencia o no existencia del mismo.

OBJ 2 PTA 2

Calcule: $\lim\limits_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, usando el teorema que estudiaste en el Módulo I de Matemática II para justificar su existencia.

Solución:

Recordemos que para todo z $\in$ $\mathbf{R}$ se cumple

$$-1 \le \text{sen}(z) \le 1, \qquad [1]$$

así como también que para todo z $\in$ $\mathbf{R}$:

$$-|z| \le z \le |z| \qquad [2]$$

Por lo tanto, en virtud de [1], [2], y las propiedades del valor absoluto tenemos:

$$\left| x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\left|\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x|,$$

de aquí que:

$$\left| x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| \quad \Leftrightarrow \quad -|x| \le x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|.$$

Ahora por aplicación del teorema 2.2, página 79, Módulo I del texto de Matemática II (Cód. 178 - 179), a las funciones f(x) = $-|x|$ y h(x) = $|x|$, resulta que:

$$-\lim_{x\to 0}|x| \le \lim_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim_{x\to 0}|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \lim_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 0.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

Compare con la forma en la que fue calculado el límite en el texto UNA.

OBJ 3 PTA 3

Demuestre que la ecuación $x^3 - 4x + 3 = 0$ tiene solución en el intervalo [-3, -2].

Solución:

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = x^3 - 4x + 3 \quad , \quad x \in [-3, -2].$$

La cual es continua por ser suma y diferencia de funciones continuas. Por otra parte se tiene:

$$f(-3) = -12 < 0 \qquad y \qquad f(-2) = 3 > 0.$$

Luego, en virtud del teorema de Bolzano, existe $x_0 \in (-3, -2)$ tal que $f(x_0) = 0$, es decir la ecuación

$$x^3 - 4x + 3 = 0\ ,$$

tiene solución en [-3. -2].

OBJ 4 PTA 4
Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 + x$ en $x = 3$.

Solución:

Tenemos que en $x = 3$, la función vale $f(3) = 12$, por lo que las coordenadas del punto de tangencia son (3, 12). De acuerdo con la definición de recta tangente dada en la pág. 30 del texto de Matemática II, Módulo II, la ecuación pedida tiene la forma:

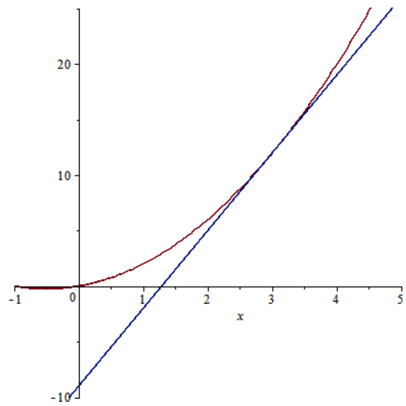
$$y = m(x - 3) + f(3),$$

para $m = f'(3)$ y $f(3) = 12$.

Ahora bien,

$$m = f'(3) = 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7.$$

Por lo tanto, luego de sustituir y simplificar nos queda que la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 + x$ en el punto de coordenadas (3,12) es: $y = 7x - 9$. En la gráfica se pueden apreciar tanto f(x) como la recta tangente.



OBJ 5 PTA 5
¿Cuáles son las dimensiones de una lata de aluminio cuya capacidad es de 40 cm^3 y que usa la menor cantidad posible de material? Suponiendo que la lata tiene forma de cilindro y tapas a ambos lados.

Solución:

En los problemas de optimización están dados siempre bien sea de forma implícita o explicita la función que se va a maximizar o minimizar y alguna condición que relaciona las variables con las que se va a trabajar.

El volumen del cilindro viene dado por el producto del área de una de las tapas y la altura del mismo, esto es:

$$(\pi r^2)h.$$

El material empleado (aluminio) en la elaboración del cilindro viene dado por la suma de las áreas de la tapa superior, la tapa inferior más el área de la parte cilíndrica, es decir:

$$(\pi r^2) + (\pi r^2) + 2\pi rh = 2(\pi r^2) + 2\pi rh. \qquad [1]$$

Recuérdese que por hipótesis tenemos: $(\pi r^2)h = 40$, de donde resulta que:

$$h = \frac{40}{\pi r^2}, \; r > 0. \qquad [2]$$

¿Por qué $r > 0$ y no $r \geq 0$?

Llamemos M a la cantidad de material empleado en la elaboración de la lata, sustituyendo [2] en [1], nos queda:

$$M(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{40}{\pi r^2}\ , r > 0,$$

$$M(r) = 2\pi r^2 + \frac{80}{r}\ , r > 0$$

Queremos hallar el mínimo de la función M, para lo cual nos apoyaremos en las propiedades de la derivada.

Comencemos por determinar el o los puntos críticos de M, es decir, puntos en los que M’ = 0, luego establezcamos la naturaleza de éstos puntos críticos, y por último calculemos el valor máximo o mínimo de la función.

$$M'(r) = 4\pi r - \frac{80}{r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\pi r = \frac{80}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \pi r^3 = 20.$$

De lo anterior resulta que el único punto crítico de M es:

$$r = \left(\frac{20}{\pi}\right)^{1/3} \approx 1{,}85 \text{ cm.}$$

Luego, en virtud del Criterio de la Primera Derivada (ver Módulo II de Matemáticas II cód. 178 – 179, página 115), tenemos que en r = 1,85 hay un mínimo, con valor:

$$\boxed{M(1{,}85) = 2\pi(1{,}85)^2 + \frac{80}{1{,}85} \approx 64{,}7 \text{ cm}^2}$$

FIN DEL MODELO.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validadora: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

Área de Matemática