Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área de Matemática

Matemática II (Cód. 178 - 179)

Cód. Carrera: 126-236-237-280-281 508-610-612-613

Fecha: 24 - 01 - 2015

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos del 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine como A transforma al vector X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y explique la interpretación gráfica del resultado.

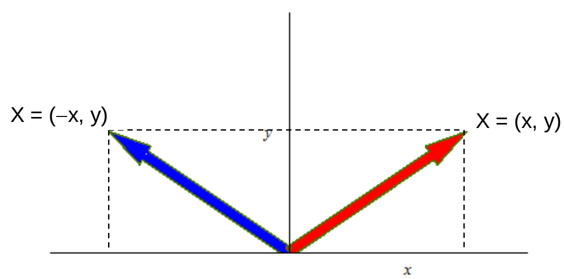
Solución:

Para averiguar en qué transforma la matriz A al vector X, calculemos AX:

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz A transforma al vector X en el vector $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$, es decir, su "simétrico respecto al eje de las ordenadas" esto es lo que se denomina una **reflexión respecto a la recta de ecuación x = 0.**

Geométricamente, tenemos:



OBJ 7 PTA 2 Aplique el método de Gauss - Jordan para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + y - z = 4 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

Solución:

Antes de comenzar a aplicar el método de Gauss - Jordan en la resolución del sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, escribámoslo en forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

Comencemos ahora con el método de Gauss - Jordan.

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right).$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales por filas a la matriz del paso anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_1 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[-1*F_2 \to F_3]{-2*F_2 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-1*F_3 \to F_2]{2*F_3 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

De la matriz anterior resulta que la solución al sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es:

$$\boxed{x = 4, \quad y = -1, \quad z = -1}$$

Paso 3: Verifique que los valores hallados son efectivamente solución del sistema de ecuaciones. Este paso no es parte del ejercicio, es solo una recomendación.

CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN (CÓD 178)

OBJ 8 PTA 3 Una fábrica produce un artículo A cuyo valor es el 40% del precio de Bs. 3.500 al cual es vendido al consumidor, precio al cual tiene una demanda de 8.000 artículos por mes. La fábrica precisa cambiar el precio de venta del artículo y ha determinado que si el precio del artículo aumenta en Bs. 1.867, entonces venderá 800 artículos menos cada mes. Suponga que el precio es una función lineal.

Determine:
¿Cuál es el precio que produce el máximo beneficio?

Solución:

Sea x el número de unidades producidas del artículo A.

Del enunciado, tenemos que el costo de producir x unidades de A es:

$$C_T(x) = 1400x.$$

Determinemos el precio de venta del artículo en función del número de unidades producidas x. Para esto determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3.500, 8.000) y (5.367, 7200) **¿De dónde sale el segundo punto?**

Así, el número de unidades producidas y vendidas del artículo A y precio p están relacionadas mediante la ecuación de demanda:

$$x - 8.000 = -\frac{800}{1.867}\left(p - 3.500\right).$$

Determinemos ahora el beneficio máximo, con:

$$U(x) = I(x) - C_T(x) = 22.170x - \frac{1.867}{800}x^2 - 1.400x = 20.770x - \frac{1867}{800}x^2.$$

Calculemos los puntos críticos de U(x), es decir, las soluciones de la ecuación U'(x) = 0.

$$U'(x) = 20.770 - \frac{1867}{400}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8.308.000}{1.867}.$$

En virtud del criterio de la segunda derivada, tenemos que en x = 8.308.000/1.867 hay un máximo.

Luego, para saber cual es el precio que produce el máximo beneficio, sustituimos el valor de x hallado en la ecuación que relaciona la cantidad de unidades producidas y vendidas con el precio p, es decir; con:

$$p = 22.170 - \frac{1867}{800}x.$$

Por lo tanto,

$$p = 22.170 - \frac{1867}{800}\left(\frac{8.308.000}{1867}\right) = 22.170 - 10.385 = 11.785.$$

OBJ 9 PTA 4 La matriz tecnológica asociada a una cierta economía es:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 & 0,1 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuál es la interpretación del coeficiente a_{24}? ¿Y la del a_{42}?

b) Si el vector de producción es $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. ¿Es la economía viable? En caso afirmativo, determine las disponibilidades, si es que existen, de cada artículo para su posible exportación.

c) ¿Cuál es la interpretación de la tercera componente del vector AX?

Solución:

Ver solución a los ejercicios propuestos 2.4, unidad II, ejercicio propuesto 1., página 117 del texto de Matemática II, módulo IV, cód 178.

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA (CÓD. 179)

OBJ 8 PTA 3 Utilice inducción para demostrar que $2n + n^3$ es divisible entre 3 para todo entero positivo n.

Solución:

Para n = 1 tenemos $2n + n^3 = 2.(1) + (1)^3 = 2 + 1 = 3$ que es divisible entre 3. Así pues, la afirmación es cierta cuando n = 1.

Para n = k, supongamos que $2k + k^3$ es divisible entre 3, esto quiere decir que:

$$\frac{2k + k^3}{3} = m, \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

para m un entero positivo.

Queremos demostrar que $2n + n^3$ es divisible entre 3 cuando n = k + 1, esto es: $2(k + 1) + (k + 1)^3$ es divisible entre 3.

Al desarrollar $(k + 1)^3$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 2(k + 1) + (k + 1)^3 &= 2k + 2 + (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \\ &= 2k + k^3 + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= 2k + k^3 + 3(k^2 + k + 1). \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\frac{2(k+1)+(k+1)^3}{3}=\frac{2k+k^3}{3}+\frac{3(k^2+k+1)}{3} = m + k^2 + k + 1 = p,$$

p entero positivo.

Por lo tanto, $2(k + 1) + (k + 1)^3$ es divisible entre 3, que es precisamente lo que se quería demostrar.

OBJ 9 PTA 4 En un cierto país se adopta una política cambiaria que consiste en devaluar mensualmente la moneda con respecto al dólar de U.S.A. en una tasa mensual de 1,1%. ¿Cuál será el monto total de la devaluación de la moneda al cabo de un año y un trimestre?

Solución:

Ver solución a los ejercicios propuestos 2.2.2, unidad II, ejercicio propuesto 7., página 218 del texto de Matemática II, módulo IV, cód 179.

FIN DEL MODELO.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validadora: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

Área de Matemática