Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemática II (Cód. 178-179)
Cód. Carrera: 126-236-280-508-610 612-613
Fecha: 28 - 02 - 2 015

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 9

OBJ 1 PTA 1 Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{7x}$**,** sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$

Solución:

Reescribamos $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{7x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{7x} = \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{5x\left(e^{5x^2}-1\right)}{5x(x)} = \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\frac{5x\left(e^{5x^2}-1\right)}{5x^2} = \frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\left[5x\left(\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}\right)\right].$$

Recordemos del álgebra de límites que:

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to 0}f(x).\lim_{x\to 0}g(x).$$

Es decir, el límite de un producto es el producto de los límites, siempre y cuando

$$\lim_{x\to x_0}f(x) \qquad y \qquad \lim_{x\to x_0}g(x),$$

existan.

Hagamos el cambio y = $5x^2$ en $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}$, con lo cual nos queda que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y},$$

de donde en virtud de la sugerencia obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}=1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{7x}=\frac{1}{7}\lim_{x\to 0}\left[5x\left(\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}\right)\right] = \frac{1}{7}\left(\lim_{x\to 0}5x\right).\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-1}{5x^2}\right) = \frac{1}{7}.0.1=0.$$

Comentario: Nótese que para usar la ayuda dada, hicimos un cambio de variables al límite original, esto nos permite calcular algunos límites a partir de otros conocidos.

OBJ 2 PTA 2 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$ **.**

Solución:

La función dada es una potencia cuya base tiende a 1 cuando $x \to \infty$, mientras que el exponente tiende a ∞, es decir, tenemos una indeterminación de la forma 1^∞.

Para calcular el límite haremos uso del hecho que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k . \qquad [*]$$

Al efectuar la división de polinomios que está dentro del paréntesis del límite que queremos calcular resulta:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} = 1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7} .$$

Así,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}$$

Calculemos el límite de la expresión encerrada en corchetes, para lo cual haremos uso de [*], efectuemos el cambio de variables:

$$y = \frac{x^2-3x+7}{8x-3} ,$$

con lo cual obtenemos para k = 1

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right] = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e .$$

Mientras que el exponente tiende a 8, por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}} = e^8}$$

OBJ 3 PTA 3 Estudie la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6}$$

en los intervalos: [2, 5] y [6, 7].

Solución:

Obsérvese que factorizando el denominador resulta:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 7x + 6} = \frac{1}{(x-1)(x-6)}.$$

Para todo x $\in$ [2, 5] la función f es continua, ya que su denominador nunca se anula en este intervalo. Mientras que para x $\in$ [6, 7] no es continua en x = 6, ya que en este punto el denominador se anula y además no pertenece al dominio de la función, condición esta que pide la definición de continuidad.

Ver texto de Matemática II Módulo I página 104, Álgebra de Funciones Continuas, ejemplo de la observación 3.

OBJ 4 PTA 4 Estudie la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -x + 3 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

en x = 0 y x = 2.

¿Qué puede concluir del resultado obtenido?

Solución:

Puesto que f es una función definida a trozos, debemos estudiar la derivabilidad en los puntos dados aplicando la definición de derivada lateral. Es decir, derivada por la izquierda y derivada por la derecha.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \qquad [1]$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0 \qquad [2]$$

En virtud de [1] y [2] concluimos que f es derivable en x = 0, y el valor de la derivada en este punto es f’(0) = 0.

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1 - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} 0 = 0 \qquad [3]$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x + 3 - (1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 \qquad [4]$$

De [3] y [4] concluimos que f **NO** es derivable en x = 2.

Por simple inspección vemos que f es continua en todo su dominio, sin embargo, por los cálculos que acabamos de realizar vemos que a pesar de ser continua, NO es derivable en x = 2.

Podemos concluir que continuidad no implica derivabilidad, pero, ¿qué pasa con la otra implicación, es decir, derivabilidad implicará continuidad?

Comentario: Al calcular límites hay un orden de prioridad en las operaciones, en el caso de [2], primero evaluamos el cociente y luego evaluamos el límite.

OBJ 5 PTA 5 Estudie detalladamente y grafique la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

Solución:

Para dibujar la gráfica de f, es necesario analizar ésta, para lo cual nos apoyaremos en el esquema dado en el texto de Matemática II, Módulo II, página 191.

- Dominio: $Dom(f) = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \neq 1\} = \mathbf{R} - \{1\}$, es decir, la función está definida en: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
- Puntos de discontinuidad: En este caso el único punto de discontinuidad es $x = 1 \notin Dom(f)$.

  Comentario: Los puntos de discontinuidad son las **posibles** asíntotas verticales.
- Paridad: Una función puede ser par o impar o no tener paridad alguna, pero en caso de tenerla esto nos ahorra el trabajo a la hora de hacer los cálculos.
  - f es par si: f(x) = f(- x), es decir, si es simétrica respecto de la recta x = 0.

    $$f(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{-(x+1)} = \frac{-x^2}{(x+1)} \neq \frac{x^2}{(x-1)} = f(x).$$

    De lo anterior resulta que f no es par.
  - f es impar si: f(x) = - f(- x), es decir, si es simétrica respecto del origen.

    $$-f(-x) = \frac{-(-x)^2}{-x-1} = \frac{x^2}{x+1} \neq \frac{x^2}{(x-1)} = f(x).$$

    De lo anterior resulta que f tampoco es impar.

    Este es un caso en el cual la función no posee paridad alguna.
- Asíntotas: **Posibles asíntotas verticales**, estudiamos los límites laterales en el punto de **discontinuidad**, en este caso, el único punto de discontinuidad es x = 1, que es el único punto que anula al denominador.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto, en virtud del resultado obtenido en el cálculo del límite, obtenemos que la recta x = 1, es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: Para esto, calculamos el límite cuando x tiende a mas/menos infinito, y dependiendo del resultado podemos concluir sí f tiene o no asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty .$$

Del resultado obtenido al calcular los límites anteriores, se desprende que f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Es decir, asíntotas que tienen la forma: y = mx + b, donde $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$.

Cuando calculamos m, obtenemos m = 1, y cuando calculamos b, obtenemos b = 1, por lo tanto, la asíntota oblicua tiene por ecuación:

$$y = x + 1.$$

(Verifíquelo)

- Cortes con los ejes:
  - Eje X: Soluciones de la ecuación y = f(x) = 0.
    En este caso:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

    De lo anterior el punto de intersección con el eje X es: (0, 0).
  - Eje Y: En este caso obtenemos el punto, “sí lo hay”, haciendo x = 0 en la expresión que define a f. Por lo tanto, el punto de corte o intersección con el eje Y, es el punto: (0, 0). (Verifíquelo)
- Cálculo y análisis de la primera y segunda derivadas:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \qquad , \qquad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} .$$

- Puntos críticos: Soluciones de la ecuación: f’(x) = 0.

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \quad o \\ x = 2 \end{cases} .$$

- Regiones de crecimiento:
  - f crece en donde f’(x) > 0.

    Puesto que la primera derivada es un cociente, la misma será mayor que cero cuando numerador y denominador sean del mismo signo, es decir, ambos positivos o ambos negativos, pero como se observa claramente, el denominador siempre es mayor que cero (¿por qué?), por lo cual el único caso que vamos a analizar es numerador mayor que cero, y esto ocurre en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$.

- f decrede donde $f'(x) < 0$.

  Cuando calculamos los intervalos de crecimiento no cubrimos todo el dominio de la función, por lo que en esa parte del dominio que no cubrimos es donde f decrece, es decir, f decrece en (0, 1) y (1, 2).

- Máximos y mínimos:
  Existen dos criterios, el de la primera derivada y el de la segunda derivad, nosotros aplicaremos el segundo criterio (se le recomienda al estudiante que aplique el primer criterio como practica).

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0.$$

Por lo tanto, en x = 0, f tiene un máximo local, cuyo valor es f(0) = 0.

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0,$$

con lo que resulta que f tiene un mínimo en x = 2, cuyo valor es f(2) = 4.

- Concavidad – Convexidad:
  - f es cóncava donde $f''(x) < 0$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1.$$

Luego, f es cóncava en $(-\infty, 1)$.

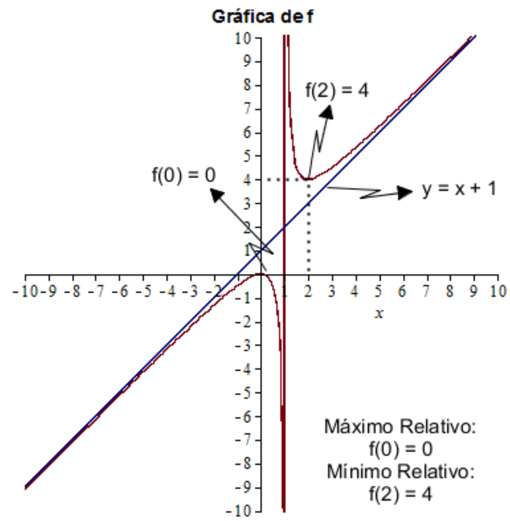
  - f es convexa donde $f''(x) > 0$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Luego, f es convexa en $(1, \infty)$.

Comentario: Obsérvese que f en convexa en donde no es cóncava. (Obvio!)

Por último, lo que nos queda es utilizar toda la información que poseemos sobre la función para elaborar su gráfica, en la misma se puede apreciar que todo encaja a la perfección.



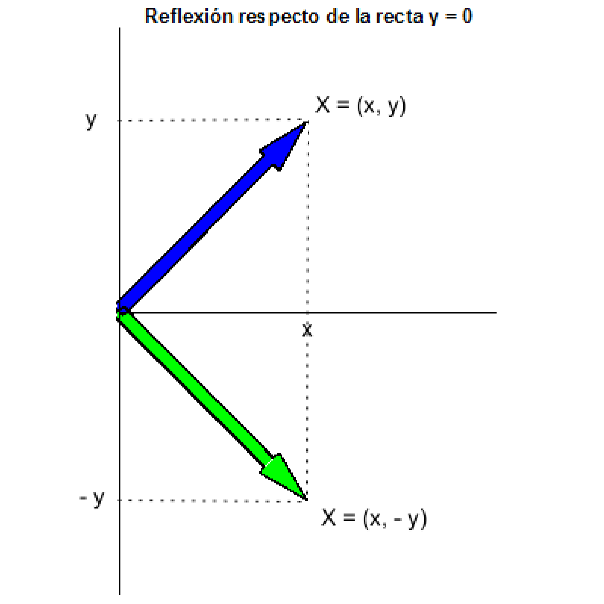
OBJ 6 PTA 6 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determine como A transforma al vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y explique la interpretación gráfica del resultado.

Solución:
Para averiguar en qué transforma la matriz A al vector X, calculemos AX:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz A transforma al vector X en el vector $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Es decir, su "simétrico respecto al eje de las abscisas" esto es lo que se denomina una **reflexión respecto a la recta de ecuación y = 0.**

Geométricamente, tenemos:



OBJ 7 PTA 7 Determine en caso de ser posible la inversa de la siguiente matriz, utilizando el método de reducción de Gauss - Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Antes de comenzar a aplicar el método de reducción Gauss - Jordan, calculemos el determinante de la matriz A (esto es materia conocida de bachillerato), esto nos va a servir para saber si la matriz A tiene o no inversa.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Puesto que el determinante de A es diferente de cero (0), la matriz tiene inversa, es decir, es invertible. Ahora si podemos aplicar el método de reducción de Gauss – Jordan, con la seguridad de que efectivamente vamos a obtener la matriz inversa A^{-1}.

Paso 1: Copiemos la matriz A y la identidad I_3, una al lada de la otra.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Paso 2: Apliquemos las mismas operaciones elementales por filas tanto a la matriz A como a la matriz identidad I_n.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_1 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_2 \to F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2*F_2 + F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_2 + F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2*F_3 + F_1 \to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1*F_3 + F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

De lo anterior resulta que la matriz inversa de la matriz A, es la matriz:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Paso 3: No obligatorio si recomendable, verificar que la matriz hallada A^{-1} es efectivamente la matriz inversa de la matriz A.

CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN (CÓD. 178)

OBJ 8 PTA 8 La demanda de computadoras viene dada por la ecuación $p = \sqrt{3400 - x^2}$, donde x computadoras pueden venderse a un precio de p bolívares cada una.

Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es p = 50 bolívares y determine qué tipo de elasticidad es.

Solución:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{3400 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{3400 - x^2}}.$$

Como $\eta = \dfrac{\frac{p}{x}}{\frac{dp}{dx}}$, entonces

$$\eta = \frac{\dfrac{p=\sqrt{3400 - x^2}}{x}}{\dfrac{-x}{\sqrt{3400 - x^2}}} = \frac{3400 - x^2}{-x^2} = 1 - \frac{3400}{x^2}. \qquad [*]$$

Cuando el precio es de p = 50 bolívares, tenemos que la demanda es:

$$50 = \sqrt{3400 - x^2}\ ,$$

es decir. $2500 = 3400 - x^2$, de donde resulta luego de resolver la ecuación de segundo grado que x = ± 30. Puesto que x representa el número de computadoras, el valor de x = - 30 se descarta y se toma x = 30.

Sustituyendo el valor de x = 30 en [*] obtenemos que:

$$\eta = 1 - \frac{3400}{(30)^2} \approx -2{,}77\,,$$

por lo que resulta que la demanda es elástica por ser: $\left|\, \eta \,\right| = 2{,}77 > 1$. ¿Qué quiere decir que la demanda sea elástica?

OBJ 9 PTA 9 Si la matriz tecnológica y el vector de producción asociados a una economía son:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix},$$

respectivamente, señale la opción que considere correcta, justificando tal selección:

a) La economía es viable.
b) La economía no es viable.
c) La economía se encuentra en equilibrio interno.

Solución:
Ver texto de Matemática II (cód 178), Módulo IV, Unidad 2, Solución de la Autoevaluación, Parte I, Ejercicio N° 2, Pág 99.

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA (CÓD. 179)

OBJ 8 PTA 8 Demuestre por inducción que:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad [*]$$

Solución:
La primera igualdad es solo una forma abreviada de escribir la suma, por lo que es indiferente trabajar con cualquiera de las dos igualdades a la hora de hacer la demostración.

Para n = 1 tenemos:

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = \frac{6}{6} = 1 \qquad [1]$$

es decir, se verifica el resultado.

Supongamos que [*] es cierta para n = h, es decir:

$$1^2 + 2^2 + ... + h^2 = \sum_{k=1}^{h} k^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}. \qquad [2]$$

[2] es nuestra hipótesis inductiva.

Veamos si [*] se cumple para n = h + 1.

$$1^2 + 2^2 + ... + h^2 + (h+1)^2 = \sum_{k=1}^{h+1} k^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6} \qquad [3]$$

[3] es nuestra tesis, es lo que debemos ver si se cumple:

Por hipótesis inductiva tenemos:

$$1^2 + 2^2 + ... + h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6},$$

Sumando $(h+1)^2$ a ambos lados de la igualdad anterior

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + ... + h^2 + (h+1)^2 &= \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2 \\ &= \frac{h(h+1)(2h+1) + 6(h+1)^2}{6} \\ &= \frac{(h+1)\left[h(2h+1) + 6(h+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(h+1)(2h^2 + 7h + 6)}{6} \\ &= \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}.\end{aligned}$$

Uniendo la primera y la última igualdad obtenemos el resultado deseado, es decir,

$$1^2 + 2^2 + ... + h^2 + (h+1)^2 = \sum_{k=1}^{h+1} k^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6},$$

para todo n.

OBJ 9 PTA 9 Si una determinada población aumenta a una tasa mensual de 0,2% con respecto a la población del mes anterior y al inicio del año 1 990 la población era de 22 millones de habitantes, ¿cuánto será la población al finalizar el año 2 000?

Solución:

Ver texto de Matemática II (cód 179), Módulo IV, Unidad 2, Solución a la Autoevaluación II, Ejercicio 1, Pág 185.

FIN DEL MODELO

Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Lapso 2014 - 1

PRUEBA DE DESARROLLO / HOJA DE RESPUESTAS

Firma Supervisor	Total páginas

Centro Local:	**U. A.:**
Nombre:	**C. Identidad:**
Correo Electrónico:	**Código Carrera:**
Asignatura: Probabilidad y Estadística I	**Código: 764**
Momento de Prueba: Prueba Integral	**Fecha: 26 - 07 - 2014**

RESULTADOS DE CORRECCIÓN

OBJ N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 = L. 0 = N.L.									

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validador: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles