Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 610 - 612 - 613 - 508 - 236 280 - 126
Fecha: 15/10/2016

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Determine el producto

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Las dos matrices cuyo producto queremos efectuar son del mismo orden, por lo que si es posible efectuar su producto, vale la pena recordar que para que el producto de matrices se pueda efectuar, es suficiente que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz, por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+6+5 & 8-9 & 12-15+20 \\ 1+6 & 4 & 6+24 \\ 2-6+1 & 8+9 & 12+15+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & -1 & 17 \\ 7 & 4 & 30 \\ -3 & 17 & 31 \end{pmatrix}.\end{aligned}}$$

OBJ 7 PTA 2 Resolver el sistema de ecuaciones valiéndose del Método de Gauss - Jordan.

$$\begin{cases} x+2y+z = -1 \\ 2x+2y+z = 1 \\ 3x+5y-2z = -1 \end{cases} \qquad [*]$$

Solución:
Antes de comenzar a resolver el sistema de ecuaciones, debemos saber si el mismo tiene o no solución, para lo cual lo único que debemos hacer es verificar que el determinante del sistema sea diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Comencemos ahora con los cálculos.

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales a la matriz aumentada de sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3*F_1+F_3 \to F_3]{-2*F_1+F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}*F_2 \to F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2*F_2+F_1 \to F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{1*F_2+F_3 \to F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{9}*F_3 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}*F_3+F_2 \to F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -13/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \end{array}\right].$$

De lo anterior resulta que la solución al sistema de tres ecuaciones lineales [*] es:

$$\boxed{x = 2, \quad y = -13/9, \quad z = -1/9}$$

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 3 El costo total semanal por la fabricación de x videodiscos en la compañía grabadora Herald está dada por la función de costo total:

$$C_T(x) = 2.500 + 2{,}2x \quad ; \quad 0 \le x \le 8.000.$$

a) ¿Cuál es el costo marginal cuando x = 1.000? ¿Y cuándo x = 2.000?

b) Encuentre la función de costo promedio $\overline{C}_T$ y la función de costo promedio marginal $\overline{C}'_T$.

Solución:

a) El costo marginal es la derivada del costo, por lo tanto:

$$\overline{C}'_T(1.000) = 2{,}2 \quad \text{y} \quad \overline{C}'_T(2.000) = 2{,}2.$$

b) La función de costo promedio es: $\bar{C}_T(x) = C_T(x)/x$, así:

$$\bar{C}_T(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{2.500}{x} + 2,2$$

y la función de costo promedio marginal:

$$\bar{C}_T'(x) = -\frac{2.500}{x^2}.$$

OBJ 9 PTA 4 Una economía formada por dos industrias, tiene la siguiente matriz tecnológica:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Halle un vector de producción de equilibrio interno.

Solución:

Este problema se resuelve de manera similar al problema Nº 2 de la página 81 del texto de Matemática II, Modulo IV, código 178.

Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vector de producción de equilibrio (ver página 79 del texto de Matemática II, Cód. 178), esto es:

$$AX = X.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,9 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} 0,1x_1 + 0,2x_2 = x_1 \\ 0,9x_1 + 0,8x_2 = x_2 \end{cases} \qquad [1]$$

Al resolver el sistema de ecuaciones [1], resulta: $x_2 = 4,5x_1$, $x_1 \in \mathrm{IR}$ [2].

Luego, una solución del problema, es cualquier vector X cuyas coordenadas verifiquen la condición [2], con $x_1 > 0$ (recuerde que las coordenadas de X son cantidades producidas, por lo que son positivas), por ejemplo, $x_1 = 1$ o $x_1 = 2$ o $x_1 = 3,5$ tenemos que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4,5 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 15,75 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 3 Utilice el principio de inducción completa para demostrar que para p ϵ **R** fijo, se verifica:

$$1 + p^2 + p^3 + \ldots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p} , \qquad [1]$$

para todo n $\in$ **N**.

Solución:

Para n = 1 se verifica, puesto que:

$$1+p=\frac{1-p^2}{1-p}=\frac{(1-p)(1+p)}{1-p}=1+p,$$

Usamos el hecho de que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Supongamos (hipótesis inductiva) que [1] se satisface para n – 1. Es decir,

$$1+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}=\frac{1-p^n}{1-p}. \qquad [2]$$

Veamos si [2] se verifica para n.

Al sumar p^n a ambos lados de [2] obtenemos

$$1+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}+p^n=\frac{1-p^n}{1-p}+p^n=\frac{1-p^n+p^n(1-p)}{1-p}=\frac{1-p^{n+1}}{1-p},$$

Lo cual demuestra que [1] es cierta para todo n, esto es:

$$\boxed{1+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}+p^n=\frac{1-p^{n+1}}{1-p}}$$

¿Qué pasa si p = 1?

OBJ 9 PTA 4 A continuación hacemos varias afirmaciones relacionadas con la función f: IR → IR, definida por f(x) = **a**x + **b**, donde **a** y **b** son constantes.

Indique con una **V** o una **F** en el espacio correspondiente según que la afirmación hecha sea verdadera o falsa respectivamente.

a. La *tasa media de variación* de la función f en el intervalo [x, x + Δx] es igual a la constante **a** ____

b. La *tasa instantánea de variación* de f en el punto x_0 tiene el valor **a**x_0 _____

c. La *tasa de variación relativa* de f en el intervalo [x , x + Δx] es $\frac{a}{ax+b}$ _____

Para el logro de este objetivo debes responder correctamente dos opciones.

Solución:

Ver página 106 y 121-122 del texto del Módulo IV del texto Matemática II, código 179.
Ver Ejercicio Propuesto 7 de la página 218 del Módulo IV del texto de Matemática II, código 179.

a. __V__ La *tasa **media** de variación* de f en el intervalo [x, x + Δx] viene dada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{a(x+\Delta x)+b-ax-b}{\Delta x}=\frac{a\,\Delta x}{\Delta x}=a. \qquad [1]$$

b. __F__ La *tasa instantánea de variación* de f en el punto x_0 es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a = a.$$

La última igualdad se sigue en virtud de [1].

Otra forma de obtener este resultado es recordando que la derivada de f en un punto es la pendiente de la recta tangente a f en dicho punto; y puesto que f es un recta la derivada de f es la pendiente de f, es decir **a**.

c. __**V**__ La *tasa de variación relativa* de f en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ es:

$$\frac{\Delta f}{f(x)\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)\,\Delta x} = \frac{a}{f(x)} = \frac{a}{ax+b}.$$

FIN DEL MODELO.