Universidad Nacional Abierta	**Matemáticas II (Cód. 178 - 179)**
Vicerrectorado Académico	**Cód. Carrera: 610 - 612 - 613 - 508 - 236 - 280 - 126**
Área de Matemática	**Fecha: 13/02/2 016**

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 6 al 9

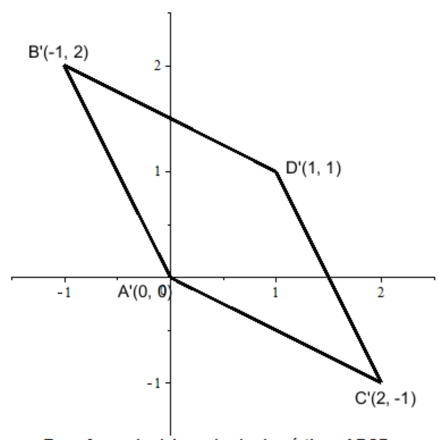
OBJ 6 PTA 1 Encuentre la imagen del cuadrado ABCD, con vértices A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1) y D(1, 1), bajo la transformación representada por la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dibuje el transformado de ABCD.

Solución:

Encontrar la imagen del cuadrado ABCD es ver en que transforma la matriz M los vértices del mismo, esto es:

$$M(A, B, C, D) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (A', B', C', D')$$

Por lo tanto, la matriz M transforma el cuadrado ABCD, con vértices A(0, 0), B(1, 0), C(0, 1) y D(1, 1) en el paralelepípedo A'B'C'D', con vértices A'(0, 0), B'(- 1, 2), C'(2, - 1) y D'(1, 1) tal y como se aprecia en la figura.



Transformado del cuadrado de vértices ABCD

Es de hacer notar que las componentes de los vértices A', B', C' y D' se pudieron haber calculado separadamente uno de otro, bastaba con multiplicar la matriz M por A, luego por B, luego por C y por último por D.

Se recomienda como ejercicio adicional hacerlo.

OBJ 7 PTA 2 Halle la inversa de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución:

Antes de comenzar a calcular la inversa, debemos saber si la misma tiene o no inversa, para lo cual lo único que debemos hacer es verificar que el determinante sea diferente de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 .$$

Comencemos ahora con el cálculo de la inversa.

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales por filas a ambas matrices, para de esta forma obtener la matriz identidad del lado izquierdo y la matriz inversa del lado derecho.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-1^*F_1 + F_3 \to F_3]{-2^*F_1 + F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2^*F_2 + F_3 \to F_3]{-2^*F_2 + F_1 \to F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-1^*F_3 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-9^*F_3 + F_1 \to F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{3^*F_3 + F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

De lo anterior resulta que la inversa de la matriz dada es:

$$\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN (CÓD. 178)

OBJ 8 PTA 3 Determine la elasticidad de la demanda si q = 500(10 - p) para cada valor de p, para p = 2 y 6. ¿Cuánto vale el ingreso marginal cuando la elasticidad de la demanda es 1?

Solución:

Por definición de elasticidad de la demanda tenemos:

$$\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{500(10-p)}(-500) = -\frac{p}{(10-p)} .$$

Para un precio unitario de p = 2, la elasticidad (η) toma el valor - 0,25, es decir, el incremento porcentual en la demanda es un cuarto del incremento porcentual en el precio, lo cual se explica por el hecho de estar en presencia de una demanda inelástica.

Mientras que para un precio unitario de p = 6, η = - 1,5, lo que quiere decir, que la disminución porcentual en la demanda es una vez y media el incremento porcentual en el precio cuando p = 6.

Para dar respuesta a la pregunta de cuánto vale el ingreso marginal cuando la elasticidad de la demanda vale 1, primero debemos hallar el valor de p que hace que η = 1, esto es:

$$\eta = \frac{p}{(10 - p)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 5.$$

Ahora bien, I(q) = p.q, de aquí que:

$$I(q) = p.q = p.500(10 - p) \quad \Leftrightarrow \quad I'(q) = 5\,000 - 1\,000p.$$

Para un precio p = 5, el ingreso marginal vale 0, coincidiendo este resultado con lo expuesto en la Observación de la página 49 del texto de Matemática II, código 178, Módulo IV.

OBJ 9 PTA 4 La interacción entre los sectores de una economía hipotética están dados en la siguiente tabla:

	Industria 1	Industria 2	Demanda Sector Externo	Producción Total
Industria 1	240	270	90	600
Industria 2	300	90	60	450

a) Obtenga la matriz tecnológica A.
b) Verifique que (I – A)X = D.

Solución:

Ver ejemplo 1 de la página 89 del Módulo IV del texto de Matemática II, código 178.

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA (CÓD. 179)

OBJ 8 PTA 3 Utilice el principio de inducción completa para demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{n} i\left(4i^2 - 3\right) = \frac{n(n+1)\left(2n^2 + 2n - 3\right)}{2} \qquad [*]$$

Solución:

Para n = 1 tenemos $1\left(4(1)^2 - 3\right) = \frac{1(1+1)\left(2(1)^2 + 2(1) - 3\right)}{2} = 1$, la afirmación es cierta.

Supongamos que el enunciado es cierto para n = h, es decir:

$$\sum_{i=1}^{h} i\left(4i^2 - 3\right) = \frac{h(h+1)\left(2h^2 + 2h - 3\right)}{2}, \qquad \text{(Hipótesis Inductiva)}$$

Queremos demostrar que el enunciado sigue siendo cierto cuando n = h + 1, esto es:

$$\sum_{i=1}^{h+1} i\left(4i^2 - 3\right) = \frac{(h+1)(h+2)\left(2(h+1)^2 + 2(h+1) - 3\right)}{2} \qquad \text{(Tesis)}$$

Separando el último término del miembro izquierdo de la igualdad precedente, utilizando la hipótesis inductiva, y luego desarrollando, nos queda:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{h+1} i\left(4i^2 - 3\right) &= \sum_{i=1}^{h} i\left(4i^2 - 3\right) + (h+1)\left(4(h+1)^2 - 3\right)\\ &= \frac{h(h+1)\left(2h^2 + 2h - 3\right)}{2} + (h+1)\left(4(h+1)^2 - 3\right)\\ &= \frac{h(h+1)\left(2h^2 + 2h - 3\right) + 2(h+1)\left(4(h+1)^2 - 3\right)}{2}\\ &= \frac{(h+1)\left(2h^3 + 10h^2 + 13h + 2\right)}{2}\\ &= \frac{(h+1)(h+2)\left(2h^2 + 6h + 1\right)}{2}.\end{aligned}$$

La última igualdad es precisamente lo que queríamos demostrar, nótese que:

$$\left(2(h+1)^2 + 2(h+1) - 3\right) = \left(2h^2 + 6h + 1\right).$$

¡Verifíquelo!

OBJ 9 PTA 4 En cierto país se adopta una política cambiaria que consiste en devaluar mensualmente la moneda con respecto al US$ (dólar de U.S.A.) en una tasa mensual de 1,1%. ¿Cuál será el monto total de la devaluación de la moneda al cabo de un año y un trimestre?

Solución:

Ver Ejercicio Propuesto 7 de la página 218 del Módulo IV del texto de Matemática II, código 179.

FIN DEL MODELO.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validador: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

Área de Matemática