Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 126 - 236 - 237 - 280 - 281 508 - 610 - 612 - 613
Fecha: 23/05/2 015

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 5

OBJ 1 PTA 1 Sea f: $D \subseteq \Re \to \Re$ una función tal que si x_0 es un punto límite del conjunto D y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L$, si sabe que $\lim\limits_{x \to 1} \mathrm{Ln}\big(f(x)\big) = 10$. Calcule el valor de L.

Solución:

Ver solución a ejercicio propuesto N° 5, pág. 144, Módulo I del texto de Matemática II (178 - 179).

OBJ 2 PTA 2 Encuentre todos los valores de la constante k = 1, 2, 3, . . . de tal manera que el límite exista.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 5}{x^k + 4x + 1}$$

Solución:

La función a la cual queremos calcular el límite es el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional, que se hacen infinitos cuando x tiende a infinito, por lo que resulta que tenemos una indeterminación de la forma infinito sobre infinito.

La existencia o no existencia del límite va a depender del valor de la constante k, de allí que debamos encontrar su valor para que éste exista.

Existen tres casos:

- Si k = 1, aplicamos la observación del recuadro de la página 57 del Módulo I de Matemática II (178 - 179) y el ejemplo 2.4.2 para obtener que el valor del límite es ∞.
- Si k = 2, por razonamiento análogo al caso k = 1, obtenemos que el valor del límite es 1.
- Si k > 2, razonando como en los casos anteriores obtenemos que el valor del límite es 0.

Observación:

Es de hacer notar, que el límite existe solo cuando el grado del polinomio del denominador es mayor o igual que el grado del polinomio del numerador.

OBJ 3 PTA 3 Dada f: $[1, 4] \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = x + 1$, demuestre que f alcanza todos los valores comprendidos entre f(1) y f(4).

Solución:

Este ejercicio no es más que una aplicación del teorema del **Valor Intermedio**, pág. 109, Módulo I del texto de Matemática II (178 - 179).

Queremos demostrar que para todo $y_0 \in [f(1), f(4)] = [2, 5]$, existe $x_0 \in [1, 4]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Para $y_0 = f(x_0) = x_0 + 1$, con $2 \leq y_0 \leq 5$, resulta que $x_0 = y_0 - 1$ con $1 \leq x_0 \leq 4$.

En resumen, puesto que y_0 es cualquiera en [2, 5] en virtud del teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe $x_0 = y_0 - 1$ tal que $f(x_0) = y_0$, es decir, la función f alcanza todos los valores comprendidos entre 2 y 5.

OBJ 4 PTA 4 Halle la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de $f(x) = x^2 + x$ en el punto de tangencia x = 3.

Solución:

Para calcular la ecuación de cualquier recta, en particular para la recta perpendicular a la gráfica de f, necesitamos dos condiciones, bien sean dos puntos por donde pasa o un punto y la pendiente, en este caso solo contamos con el punto de coordenadas (3, 12), por lo que necesitamos la pendiente, pero ésta la podemos obtener calculando la derivada de f en x = 3 (¿por qué?).

La pendiente de la recta perpendicular a la gráfica de f en el punto (3, 12) es.

$$m = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2(3)+1} = -\frac{1}{7}.$$

Ahora bien, la ecuación de una recta dado un punto $P_0(x_0, y_0)$ por donde pasa y su pendiente m es:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Por lo tanto, luego de sustituir nos queda que la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x$ en el punto de coordenadas (3,12) es:

$$\boxed{y - 12 = -\frac{1}{7}(x - 3)}$$

OBJ 5 PTA 5 Sea f: [0, 2] $\to \Re$ la función definida por $f(x) = x^3 - 4x + 3$. Verifique que f cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio (también conocido como Teorema de Lagrange) en el intervalo [0, 2], y en caso de ser posible, calcule explícitamente el (los) punto(s) $x_o \in [0, 2]$ que verifique(n) el teorema.

Solución:

Como la función f es continua en el intervalo cerrado [0, 2] por ser un polinomio y derivable en el abierto (0, 2) (¿por qué?), entonces f verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio o Teorema de Lagrange en el intervalo [0, 2], pág 126, Módulo II del texto de Matemática II (178 - 179). Luego, existe al menos un $x_0 \in (0 , 2)$, tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \qquad [*]$$

Puesto que $f'(x_0) = 3x_0^2 - 4$, f(2) = 3 y f(0) = 3, de [*] resulta: $3x_0^2 - 4 = 0$, de donde se obtiene:

$$x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{o} \quad x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Como $x_0 \in (0, 2)$, necesariamente el único punto que verifica el TVM es:

$$\boxed{x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

FIN DEL MODELO.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validador: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

Área de Matemática