Universidad Nacional Abierta **Matemáticas II (Cód. 178 - 179)**
Vicerrectorado Académico **Cód. Carrera: 610 - 612 - 613 - 508 236 - 280 - 126**
Área de Matemática **Fecha: 04/07/2015**

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos del 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determine como A transforma al vector X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y explique la interpretación geométrica del resultado.

Solución:

Para averiguar en qué transforma la matriz A al vector X, calculemos AX:

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz A transforma el vector X = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el vector $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$, es decir, una “reflexión respecto del origen de coordenadas”.

OBJ 7 PTA 2 Aplique si es posible, el método de Gauss - Jordan para resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} -3x - 2y - z = 0 \\ y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Solución:

Para aplicar el método de Gauss - Jordan, debemos estar plenamente seguros que el sistema de ecuaciones tiene solución, para lo cual calcularemos el determinante de los coeficientes del mismo, el cual luego de calcularlo tiene por valor 12.

Puesto que el determinante es diferente de cero podemos afirmar que el sistema tiene solución y además es única. Ahora si podemos comenzar a aplicar el método de Gauss - Jordan.

Escribamos el sistema en forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales por filas a la matriz del paso anterior para llevarla de esta forma a la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}*F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2*F_1+F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{2}{3}*F_2+F_1 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{5}{3}*F_2+F_3 \to F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}*F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1*F_3+F_1 \to F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2*F_3+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

De la matriz anterior resulta que la solución al sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es:

$$\boxed{x = -1, \quad y = 1, \quad z = 1}$$

Paso 3: Verifique que los valores hallados son efectivamente solución del sistema de ecuaciones. Este paso no es parte del ejercicio, es solo una recomendación.

CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN (CÓD 178)

OBJ 8 PTA 3 Determine la función ingreso marginal y el costo marginal en el nivel correspondiente a q = 300 si la ecuación de demanda es

$$q = 1\,000 - 100p.$$

Solución:

Recordemos que la función ingreso viene dada por el producto del número de unidades vendidas "q" y el precio "p" de venta, esto es:

$$I(q) = qp.$$

De la ecuación dada obtenemos que el precio p de venta es: $p = 10 - 0{,}01q$, por lo tanto,

$$I(q) = qp = q(10 - 0{,}01q) = 10q - 0{,}01q^2.$$

La función de ingreso marginal I'(q), es la derivada de la función ingreso, por lo tanto:

$$\boxed{I'(q) = 10 - 0{,}02q}$$

El ingreso marginal correspondiente a un nivel de producción de 300 se obtiene sustituyendo q = 300 en la expresión que define a I', es decir:

$$\boxed{I'(300) = 10 - 0{,}02(300) = 10 - 6 = 4}$$

OBJ 9 PTA 4 La matriz tecnológica asociada a una cierta economía es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuál es la interpretación del coeficiente $a_{21} = \frac{1}{4}$?

b) Si el vector de producción es: $X = \begin{pmatrix} 540 \\ 600 \\ 900 \end{pmatrix}$:

b1) ¿Es la economía viable? En caso afirmativo, ¿cuáles son las disponibilidades de cada artículo producido para su posible exportación?

b2) ¿Es X un vector de producción de equilibrio interno? ¿Por qué?

b3) ¿Cuál es la interpretación de la segunda componente del vector AX?

Solución:

Ver ejercicio N° 1, páginas 80 y 81 del texto de Matemática II, módulo IV, cód 178.

INGENIERÍA Y MATEMÁTICA (CÓD. 179)

OBJ 8 PTA 3 Utilice el principio de inducción completa para demostrar que:

$$1+3+5+...+2n-1=n^2 \qquad [*]$$

Solución:

El miembro izquierdo de [*] puede ser escrito en forma abreviada como:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+...+2n-1$$

Para n = 1 tenemos 2(1) - 1 = 1 = $(1)^2$. Así pues, la afirmación es cierta cuando n = 1.

Supongamos que el enunciado es cierto para n = h, es decir:

$$\sum_{k=1}^{h}(2k-1)=h^2, \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

Queremos demostrar que el enunciado sigue siendo cierto para n = h + 1, esto es:

$$\sum_{k=1}^{h+1}(2k-1)=(h+1)^2, \quad \text{(Tesis)}$$

separando el último término del miembro izquierdo de la igualdad precedente. Luego, desarrollando y utilizando la hipótesis inductiva, nos queda:

$$\sum_{k=1}^{h+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{h}(2k-1)+\left(2(h+1)-1\right)=\sum_{k=1}^{h}(2k-1)+2h+1=h^2+2h+1=(h+1)^2,$$

lo cual demuestra que [*] es cierto para todo $n \geq 1$.

OBJ 9 PTA 4 Sea p = p(h) la función que mide la presión atmosférica en función de la altura h sobre el nivel del mar (la altitud), en donde p la medimos en pascales (Pa) y h en metros (m).

a) Calcule la tasa promedio de variación y la tasa de variación por pascal y por metro de la presión p al pasar de 1 000m a 1 500m, sabiendo que:

$$p(1\,000) = 0{,}899 \times 10^5 \text{ Pa}, \; p(1\,500) = 0{,}828 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

b) Calcule la tasa puntual de cambio de presión atmosférica a la altitud de 1 000m, sabiendo que: $p(h) = p_0 \quad e^{-\frac{g}{K}h}$.

c) Determine, de manera general, las tasas de cambio

$$\frac{\Delta p}{\Delta h}, \; \frac{\Delta h}{p(h)\,\Delta p}$$

en función de h y Δh, para cualquier intervalo [h , h + Δh], sabiendo que:

$$p(h) = p_0 \; e^{-\frac{g}{K}h}$$

Solución:

Ver ejercicio N° 1, página 213 del texto de Matemática II, módulo IV, cód 179.

FIN DEL MODELO.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validador: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

Área de Matemática