Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Matemáticas II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 126 - 236 - 237 - 280 - 281 - 508 - 610 - 612 - 613
Fecha: 23/07/2 016

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 5

OBJ 1 PTA 1 Si se sabe que,

$$\cos(2x) = 1 - 2\,\text{sen}^2(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

calcule, si existe,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}.$$

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2\,\text{sen}^2(x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}\,|\text{sen}(x)|}{x}$$

Por definición de función valor absoluto, tenemos:

$$|\text{sen}(x)| = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{si} \quad \text{sen}(x) \geq 0 \\ -\text{sen}(x) & \text{si} \quad \text{sen}(x) < 0 \end{cases}.$$

Puesto que, el límite se está estudiando entorno a 0, tenemos:

$$|\text{sen}(x)| = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\text{sen}(x) & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}\,|\text{sen}(x)|}{x} = \sqrt{2} \lim_{x \to 0} \frac{|\text{sen}(x)|}{x}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ -\sqrt{2} \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}.$$

De lo anterior se concluye que $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(2x)}}{x}$ no existe, recuerde que cuando éste existe es único, y en este caso tiene dos valores, $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

Especialista: Frankie Gutiérrez

Validador: Alejandra Lameda
Evaluadora: Florymar Robles

OBJ 2 PTA 2 Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$, para n entero positivo.

Solución:

Este límite es de la forma 0/0, por lo que debemos tratar de romper dicha indeterminación, para esto, recordemos que:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + a^0b^{n-1}\right),\ n \in N,\ a \text{ y } b \in \Re,$$

en particular para a = 1 + x y b = 1, tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x)\left[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \ldots + (1+x) + (1+x)^0\right]}{x} \\ &= \lim_{x \to 0}\left[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \ldots + (1+x) + (1+x)^0\right] \\ &= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{\text{n veces uno}} = n\end{aligned}}$$

OBJ 3 PTA 3 Demuestre que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva, la cual es menor que 1.

Solución:

Definamos la función auxiliar $f(x) = x2^x - 1$ para $x \in [0, 1]$.

Esta función es continua en todo $\Re$, por ser diferencia de funciones continuas (ver página 104 del Módulo I del texto de Matemática II (cód. 178 - 179), Álgebra de Funciones Continuas), en particular es continua en [0, 1], con $f(0).f(1) < 0$, por lo que se satisfacen las hipótesis del **Teorema de Bolzano** (ver página 108 del Módulo I del texto de Matemática II (cód . 178 - 179), Sección 3.6 Propiedades de las funciones continuas) , el cual nos garantiza la existencia de por lo menos un $x_0 \in (0, 1)$ tal que: $f(x_0) = 0$, es decir:

$$\boxed{f(x_0) = x_0 2^{x_0} - 1 = 0}$$

¿Por qué podemos garantizar que x_0 es positiva?

OBJ 4 PTA 4 Si se sabe que,

$$\left[\operatorname{arcsen}(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right).g'(x),$$

calcule la derivada de la función

$$f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Solución:

$$f'(x)=\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}.\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}}.\left(\frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2+x^4}}.\left(\frac{2-2x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{2\left(1-x^2\right)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}.\left(1+x^2\right)} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left|1-x^2\right|.\left(1+x^2\right)} \qquad [1]$$

Recordemos que:

$$\left|1-x^2\right| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad 1-x^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|<1 \\ -\left(1-x^2\right) & \text{si} \quad 1-x^2<0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|>1 \end{cases} \qquad [2]$$

Al sustituir [2] en [1] queda:

$$f'(x)=\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right]' = \begin{cases} \dfrac{2}{\left(1+x^2\right)} & si \quad |x|<1 \\ -\dfrac{2}{\left(1+x^2\right)} & si \quad |x|>1 \end{cases}$$

¿Qué pasa con f’(x) en el caso de ser x = $\pm$ 1?

OBJ 5 PTA 5 Utilice los dos primeros términos del **Polinomio de Taylor** de la función f(x) = e^x entorno al punto c = 0, para estimar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Solución:

Tenemos que el Polinomio de Taylor de grado dos para la función f(x) = e^x entorno al punto c = 0, es:

$$f(x) = e^{x} \approx 1 + x \ .$$

Luego, para $x \neq 0$, tenemos que:

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{x} - 1}{x} \approx 1$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} \approx \lim_{x \to 0} 1 = 1}$$

FIN DEL MODELO