Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

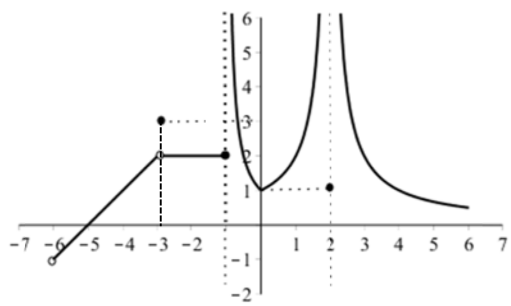
Matemáticas II (Cód. 178 - 179)
Cód. Carrera: 610 - 612 - 613 - 508 - 236 - 280 - 126
Fecha: 19/11/2 016

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 9

OBJ 1 PTA 1 Encuentre los límites indicados usando la gráfica dada, y concluya la existencia o no existencia justificando su respuesta:

a) $\lim\limits_{x\to -6^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.



Solución:

Empecemos a calcular y analizar:

a) $\lim\limits_{x\to -6^+} f(x) = -1$	Al ver la grafica de f, notamos que solo podemos acercarnos a - 6 por la derecha, también notamos que mientras más cerca x está de - 6, los valores de f(x) están mas cerca de - 1, por lo cual afirmamos que $\lim\limits_{x\to -6^+} f(x)$ existe y es igual a - 1.
b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 2$	Para que $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ exista, deben existir y ser iguales los límites por la derecha y por la izquierda, en este caso se aprecia claramente de la gráfica de la figura que ambos límites existen y son iguales a 2.
c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$	Al observar la gráfica, notamos que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, mientras que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2$, por lo que podemos concluir que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe.
d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	Al igual que hicimos en el apartado c), debemos analizar los límites a derecha e izquierda de x = 2, pero al inspeccionar la gráfica vemos que ambos límites a pesar de ser “iguales” no son números, por lo cual, podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ no existe.

OBJ 2 PTA 2 Calcule: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2-2}\right)^{x+1}$.

NOTA: Justifique su respuesta

Solución:

Dividiendo el numerador de la fracción por el denominador, nos queda:

$$\frac{x^2-x}{x^2-2}=1+\frac{-x+2}{x^2-2}.$$

De este modo, cuando $x \to \infty$ la función dada es una potencia cuya base tiende a la unidad, mientras que el exponente tiende a infinito, por lo que tenemos una indeterminación de la forma 1^{∞}.

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right)^{x}\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right).$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{-x+2}}\right]^{x\left(\frac{-x+2}{x^2-2}\right)}\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right) \qquad [*]$$

[*] es el límite de un producto y el límite de un producto es el producto de los limites cuando los limites por separado existen, en este caso el límite del segundo factor existe (¿Por qué?), por lo que nuestro problema se reduce a calcular el límite del primer factor, esto es:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{-x+2}}\right]^{\left(\frac{-x^2+2x}{x^2-2}\right)},$$

como $\dfrac{-x+2}{x^2-2} \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $\dfrac{x^2-2}{-x+2} \to -\infty$ y $\dfrac{-x^2+2x}{x^2-2} \to -1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-x+2}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{-x+2}}\right]^{\left(\frac{-x^2+2x}{x^2-2}\right)} = \frac{1}{e} \qquad [**]$$

De todo lo anterior y en virtud de [*] y [**], resulta:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2-2}\right)^{x+1} = \frac{1}{e}}$$

OBJ 3 PTA 3 Pruebe que la función $f(x)=x^2-2$, tiene al menos una raíz real en el intervalo [1, 2].

Solución:

Este ejercicio es una aplicación del Teorema de Bolzano, por lo que únicamente debemos es verificar que f satisface sus hipótesis, con lo cual podremos garantizar la existencia de al menos una raíz en el intervalo [1, 2].

- Por ser f un polinomio es continua en $\Re$, en particular lo va a ser en cualquier intervalo.
- Cambia de signo en los extremos del intervalo [1, 2], tal y como se puede apreciar: f(1) = - 1 < 0 < 2 = f(2).
- Por lo tanto, existe c $\in$ (1, 2) tal que: $f(c)=0$.

Calculemos c.

$$f(c) = c^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; c = \pm\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2} \in (1,2)$ y $f\left(\sqrt{2}\right) = 0$.

Por lo tanto, $f(x)=x^2-2$ tiene al menos una raíz real (solución) en el intervalo [1, 2] como se quería demostrar.

OBJ 4 PTA 4 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=3.\cos(x)+\pi x$ en x = 0.

Solución:

Recordemos primero que para determinar la ecuación de una recta, necesitamos dos condiciones.

- Dos puntos por donde esta pasa o,
- Un punto y la pendiente.

En nuestro caso contamos con el punto (0,f(0) y la pendiente m = f’(0), por lo tanto la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=3.\cos(x)+\pi x$ en x = 0, es:

$$\boxed{y = \pi x + 3}$$

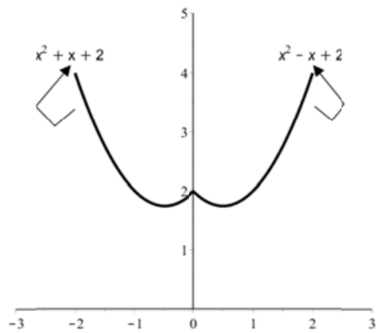
OBJ 5 PTA 5 Halle los máximos y mínimos relativos de $f(x)=x^2-|x|+2$.

Solución:

En virtud de la definición de la función valor absoluto, tenemos que:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & , \text{ si } x>0 \\ 2 & , \text{ si } x=0 \\ x^2+x+2 & , \text{ si } x<0 \end{cases}.$$

La grafica de f se puede apreciar en la figura anexa.



Grafica de $f(x) = x^2 - |x| + 2$

Comencemos por calcular los puntos críticos de la función, es decir, aquellos puntos donde la derivada vale cero o no existe.

- Para $x > 0$, $f'(x) = 2x - 1$, la cual vale cero para $x = \frac{1}{2}$, y $f''(x) = 2$, puesto que $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, en $x = \frac{1}{2}$ hay un mínimo, cuyo valor es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$.
- Para $x < 0$, $f'(x) = 2x + 1$, con valor cero para $x = -\frac{1}{2}$, y $f''(x) = 2$, ya que $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$, en $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo, cuyo valor es $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$.
- Por último, en x = 0, la función es continua mas no derivable (¿Por qué?), por consiguiente **NO** podemos aplicar el procedimiento de antes. Estudiemos el comportamiento de la derivada de la función a la derecha y a la izquierda de x = 0. A la derecha, es decir, para x > 0 la derivada es 2x - 1 es menor que cero (f' < 0), la función decrece y a la izquierda de cero, la derivada es mayor que cero (f' > 0), la función crece, por lo tanto, en x = 0, la función tiene un máximo, con valor f(0) = 2.

Todo el análisis hecho se puede apreciar claramente en la figura.

OBJ 6 PTA 6 Realice los cálculos pedidos: 4C - 2B + 3A, para:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

4C - 2B + 3A =

$$4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 12 \\ 15 & 16 & 5 \\ -14 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

OBJ 7 PTA 7 Aplique el método de Gauss - Jordan para la resolución del sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1. \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3x + 5y - 2z = -1 \end{cases}$$

Solución:

Antes de aplicar el método de Gauss - Jordan, debemos verificar que el sistema tenga solución, para lo cual procederemos a calcular el determinante de los coeficientes del mismo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 .$$

Comencemos ahora con el cálculo de la inversa.

Paso 1: Construyamos la matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Paso 2: Apliquemos operaciones elementales por filas a la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2^*F_1 + F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3^*F_1 + F_3 \to F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}^*F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2^*F_2 + F_1 \to F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{1^*F_2 + F_3 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{9}^*F_3 \to F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}^*F_3 + F_2 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -13/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 \end{array}\right].$$

De lo anterior resulta que la solución del sistema de ecuaciones dado es:

$$\boxed{x = 2 \quad , \quad y = -\frac{13}{9} \quad , \quad z = -\frac{1}{9}}$$

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 8 El costo total semanal por la fabricación de x videodiscos en la compañía grabadora Herald está dada por la función de costo total:

$$C_T(x) = 2.500 + 2{,}2x \quad ; \quad 0 \le x \le 8.000.$$

a) ¿Cuál es el costo marginal cuando x = 1.000? ¿Y cuándo x = 2.000?

b) Encuentre la función de costo promedio $\overline{C}_T$ y la función de costo promedio marginal $\overline{C}'_T$.

NOTA:

Para lograr el objetivo de responder correctamente las 2 partes de la pregunta.

Solución:

a) El costo marginal es la derivada del costo, por lo tanto:

$$\overline{C}'_T(1.000) = 2{,}2 \quad \text{y} \quad \overline{C}'_T(2.000) = 2{,}2.$$

b) La función de costo promedio es: $\overline{C}_T(x) = C_T(x)/x$, así:

$$\overline{C}_T(x) = \frac{2.500}{x} + 2{,}2$$

y la función de costo promedio marginal:

$$\overline{C}'_T(x) = -\frac{2.500}{x}.$$

OBJ 9 PTA 9 La interacción entre los sectores de una economía hipotética están dados en la siguiente tabla:

	Industria 1	Industria 2	Demanda Sector Externo	Producción Total
Industria 1	240	270	90	600
Industria 2	300	90	60	450

a) Obtenga la matriz tecnológica A.
b) Verifique que (I – A)X = D.

Solución:

Ver ejemplo 1 de la página 89 del Módulo IV del texto de Matemática II, código 178.

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 8 Demuestre utilizando el Método de Inducción que para p > 1 fijo natural, se verifica:

$$1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^n = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}\,, \qquad [1]$$

para todo natural $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Para n = 1 se verifica, puesto que

$$1+p=\frac{1-p^2}{1-p}=\frac{(1-p)(1+p)}{1-p}=1+p,$$

Usamos el hecho de que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Supongamos (hipótesis inductiva) que [1] se satisface para n – 1, es decir

$$1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}=\frac{1-p^n}{1-p}. \qquad [2]$$

Veamos si [2] se verifica para n.

Sumando p^n a ambos lados de [2] obtenemos

$$1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}+p^n=\frac{1-p^n}{1-p}+p^n=\frac{1-p^n+p^n(1-p)}{1-p}=\frac{1-p^{n+1}}{1-p},$$

Lo cual demuestra que [1] es cierta para todo n, esto es:

$$\boxed{1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{n-1}+p^n=\frac{1-p^{n+1}}{1-p}}$$

¿Qué pasa si p = 1?

OBJ 9 PTA 9 En cierto país se adopta una política cambiaria que consiste en devaluar mensualmente la moneda con respecto al US$ (dólar de U.S.A.) en una tasa mensual de 1,1%. ¿Cuál será el monto total de la devaluación de la moneda al cabo de un año y un trimestre?

Solución:

Ver Ejercicio Propuesto 7 de la página 218 del Módulo IV del texto de Matemática II, código 179.

FIN DEL MODELO.