Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Cálculo I (749)
Fecha: 03 / 10 / 2009

**MODELO DE RESPUESTAS**
**Objetivos 1, 2, 3 y 4.**

**OBJ 1 PTA 1**

Considere la función f: [0,1] $\to$ IR, definida por:

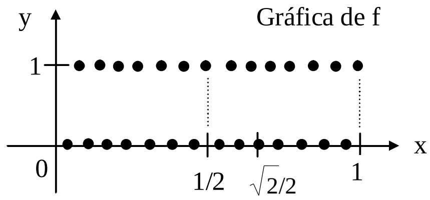
$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \in Q \cap [0,1] \\ 0 \ , & x \notin Q \cap [0,1] \end{cases}$$

Has una representación gráfica de f y estudie si existen o no los siguientes límites:

**a)** $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

***Respuesta***

Si intentamos hacer la gráfica de f podremos notar que la misma consiste de puntos en el eje X (los valores de f en irracionales) y de puntos paralelos al eje X a la altura y = 1 valores de f en los racionales), como se muestra la figura.




los
(los

Si tratamos de ver que ocurre con los valores de la función f en las cercanías de un punto, podremos notar que f toma el valor 0 y el valor 1 en puntos cercanos a cualquier punto fijo, entonces f no tiene límite en ningún punto de [0,1]. Esto lo podemos formalizar usando la proposición 2 del texto (p.24), de la siguiente manera:

Si $x_0 \in [0\ ,\ 1]$ , podemos:

- considerar una sucesión $\{x_n\}$ de *números racionales* del intervalo [0 , 1] que converge a $x_0$ , por ejemplo, si $x_0 = 1/2$, podemos tomar $x_n = 1/2 - 1/n$, $n \geq 2$.
- considerar una sucesión $\{y_n\}$ de *números irracionales* del intervalo [0 , 1] que converge a $x_0$, por ejemplo si $x_0 = 1/2$, podemos tomar $y_n = 1/2 - \sqrt{2}/n$, $n \geq 4$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

y de esta manera de acuerdo a la proposición 2, p.24 del texto, f no tiene límite en cualquier punto $x_0 \in [0\ ,\ 1]$, en particular 1os límite indicados no existen.

**OBJ 2 PTA 2**

Sea $f: D\subset IR \to IR$ la función definida por $f(x) = Ln(Ln(Ln(x)))$.
¿Cuál debe ser D, de manera que f resulte continua sobre el mayor (en el sentido de contención) subconjunto posible de IR?

***Respuesta***.

Como la función $g(x) = Ln\ x$ es continua en su dominio, de acuerdo a la proposición 10 del texto (p.89) la función f es continua donde esté definida la composición $g_o g_o g$ (¿ por qué ?).

El dominio de $g(x) = Ln\ x$ es: $Dom\ g = (0, +\infty)$

El dominio de $(g_o g) = Ln(Ln\ x)$ es: $\{x\in IR: Ln\ x > 0\} = (1, +\infty)$

El dominio de $f = Ln(Ln(Ln\ x))$ es: $\{x\in IR: Ln(Ln\ x) > 0\} = \{x\in IR: Ln\ x > 1\} = (e, +\infty)$

En conclusión D es el intervalo $(e, +\infty)$.

**OBJ 3 PTA 3**

Calcular la derivada de la función $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el punto $x_0=0$.

**Respuesta :**

Calculemos las derivadas laterales de f en $x_0=0$ :

$$\mathbf{f'(0^-)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0$$

$$\mathbf{f'(0^+)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x - 1)}{x}\frac{(\cos x + 1)}{(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\text{sen}^2\, x}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\text{sen}^2\, x}{x^2}\frac{x}{(\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\text{sen}^2\, x}{x^2} \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(\cos x + 1)} \quad (\textit{¿por qué ?})$$

$$= 0 \quad (\textit{¿por qué ?})$$

Como $f'(0^-) = f'(0^+)$ entonces $f'(0) = 0$.

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente :
Sean g, h $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ las funciones definidas por $g(x)=x^2 +1$, $h(x)= \cos(x)$ , para todo $x\in\mathbf{R}$ entonces g y h son derivables en $\mathbf{R}$ (*¿por que*?) y en particular en $x_0 =0$. Ademas $g'(x) =2x$, $h'(x) =\text{sen}(x)$ y por lo tanto

$$0= 2.0 = g'(0) = g'(0^-) = f'(0^-) \quad (\textit{¿por que}?)$$

$$0= \text{sen}(0) = h'(0) = h'(0^+) = f'(0^+) \quad (\textit{¿por que}?)$$

**OBJ 4 PTA 4**

Sea h : **R** → **R** definida por h(x) = f(g(x)) tal que g(3) = 6, g′(3) = 4 y f ′(6) = 7. Use la regla de cadena para hallar el valor de h′(3).

**Respuesta**

Como g es derivable en $x_0 = 3$ y f es derivable en g(3) = 6, usando la regla de la cadena, la función compuesta $h = f_o g$ es derivable en $x_0$ y $h'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$, luego

$$h'(3) = f'(g(3))\, g'(3) = f'(6)\, g'(3) = 7 \,.\, 4 = 28,$$

entonces h′(3) = 28

**FIN DEL MODEO DE RESPUESTAS**