Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Cálculo 1 (749)
Cód. Carrera: 508
Fecha: 19/06/2010

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1 Sea $f:(-1,1) \longrightarrow IR$ una función tal que $\dfrac{2\,\text{sen}(2x)}{x} \leq f(x) \leq 4+x^2$, $x \in (-1,1)$.

Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Respuesta.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\text{sen}(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,\text{sen}(2x)}{2x} = 4 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(2x)}{2x} = 4$ y $\lim\limits_{x\to 0} 4-x^2 = 4$

De acuerdo con la proposición 4, página 34 del texto (límites intercalados)

$$4 = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\text{sen}(2x)}{x} \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} 4-x^2 = 4$$

entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$.

OBJ 2 PTA 2 Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua y estrictamente monótona decreciente. Demuestre que la imagen de f del intervalo [a,b] es el intervalo [f(b),f(a)] y $f:[a,b] \to [f(b),f(a)]$ es una biyección.

Respuesta : Como f es continua y estrictamente monótona decreciente la imagen del intervalo [a,b] a través de f es el intervalo [f(b) , f(a)] (ver pág. 99 del texto) , luego $f:[a,b] \longrightarrow [f(b),f(a)]$ es sobreyectiva. Como la función f estrictamente monótona decreciente, entonces f es inyectiva (*¿por qué ?*) y por lo tanto biyectiva.

OBJ 3 PTA 3 Usa el concepto de derivada de una función para calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

Respuesta

Usando la definición de derivada dada en la p. 127 del texto, tenemos:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{\dfrac{1-(a+h)}{2+a+h} - \dfrac{1-a}{2+a}}{h}$$

$$= \text{lím}_{h\to 0} \frac{\dfrac{-3h}{(2+a+h)(2+a)}}{h} = \text{lím}_{h\to 0} \frac{-3}{(2+a+h)(2+a)}$$

$$= -\frac{3}{(2+a)^2}$$

Otra manera de obtener el mismo resultado es usando la expresión de la derivada dada en la p.138 del texto, como se indica a continuación:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1-x}{2+x}-\frac{1-a}{2+a}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{-3(x-a)}{(2+x)(2+a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-3}{(2+x)(2+a)} = -\frac{3}{(2+a)^2}$$

OBJ 4 PTA 4 Sea $f : (-\pi/2 , \pi/2) \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = tg(x)$ y sea g su inversa. Halle**,** empleando la regla de la cadena, la derivada de la función g.

Respuesta:

Sea $g : \mathbf{R} \to (-\pi/2 , \pi/2)$ definida por $g(x)=f^{-1}(x)$, entonces $f(g(x))=x$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$ usando la regla de la cadena

$f'(g(x))\, g'(x)=1$. Como

$$f'(x)= \sec^2(x)\neq 0,\ x\in(-\pi/2 , \pi/2),$$

entonces $g'(x)= \dfrac{1}{f'(g(x))} = \dfrac{1}{\sec^2(\operatorname{arctg}(x))} = \dfrac{1}{1+tg^2(\operatorname{arctg}(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$

OBJ 5 PTA 5 Sean $a,b\in\mathbf{R}$, tales: $a<b$, $\cos(b) \neq \cos(a)$ y $sen(x)\neq 0$, para todo $x\in(a , b)$. Utilice el teorema de Cauchy para demostrar que existe $x\in\mathbf{R}$ tal que $\dfrac{sen(b) - sen(a)}{\cos(b) - \cos(a)} = -cotg(x)$.

Respuesta Consideremos las funciones $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, entonces f y g verifican las hipótesis del teorema de Cauchy (*compruébalo*) en el intervalo [a,b] (ver p. 190 del texto) por lo tanto existe $x\in(a,b)$, tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x),$$

luego

$$[sen(b) - sen(a)]\, [-sen(x)] = [\cos(b) -\cos(a)][\cos(x)].$$

Como $\cos(b) \neq \cos(a)$ y $sen(x)\neq 0$, para todo $x\in(a , b)$, haciendo los despejes correspondientes en la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{sen(b) - sen(a)}{\cos(b) - \cos(a)} = -cotg(x), \qquad \text{para algún } x\in(a,\ b)$$

OBJ 6 PTA 6 Exprese al polinomio $P(x) = 7x^3 + x^2 + 8$ en potencias de $(x - 1)$.

Respuesta:<u>**:**</u> Evaluemos al polinomio y a sus 3 primeras derivadas en $x_o = 1$.

$P(x) = 7x^3 + x^2 +8$ $P(1) = 16$

$P'(x) = 21x^2 + 2x$ $P'(1) = 23$

$P^{(2)}(x) = 42x + 2$ $P^{(2)}(1) = 44$

Elaborado por: Chanel Chacón

$P^{(3)}(x) = 42$ $P^{(3)}(1) = 42$

Sustituimos en (I) con $x_o = 1$ y $n = 3$, obteniendo la expresión buscada:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + (44/2)(x - 1)^2 + (42/6)(x - 1)^3$$

Es decir:

$$P(x) = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$

Que puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones, para concluir que:

$$7x^3 + x^2 + 8 = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$

OBJ 7 PTA 7 Dar una estimación del error cometido al aproximar sen(x) por el polinomio de Taylor en $x = 0$

Respuesta: Consulta la pagina 265 del Libro Texto UNA (cod 700), sección 15, ejercicio resuelto 2

OBJ 8 PTA 8 Construir la curva dada por

$$x = \alpha(t) = \sqrt{1 - t^2}$$

$$y = \beta(t) = \frac{1}{t}$$

Respuesta: Consulta la pagina 354 del Libro Texto UNA (cod 700), sección 46 ejercicio resuelto 1

FIN DEL MODELO

Elaborado por: Chanel Chacón