Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Cálculo I (749)

Fecha: 30 / 10 / 2010

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

Sea f :**R** →**R** la función definida por f(x) = $\frac{3x^2}{2}$. Demuestre usando la definición de límite (con epsilon y delta) que $\lim_{x\to 3} \mathbf{f}(x) = \frac{27}{2}$.

Respuesta. De acuerdo a la definición de límite, dado un número positivo ε, debemos hallar un número δ>0, tal que si $0<|x - 3|<\delta$, entonces $|f(x) - 27/2|<\varepsilon$.

Como:

$$|f(x)-27/2| = \left|\frac{3x^2}{2} - \frac{27}{2}\right| = \frac{3}{2}|x^2-9| = \frac{3}{2}|x+3|\,|x-3| \qquad [1]$$

tratemos acotar [1] por una expresión del tipo $M|x-3|$, donde M es una constante positiva, ya que de lograr esto tendríamos

$$|f(x)-27/2| = M|x-3| < M\delta$$

y por lo tanto, para que $|f(x)-27/2|<\varepsilon$, bastaría tomar $\delta<\varepsilon/M$.
Para lograr esto, es necesario acotar el número $|x+3|$ y esto se logra suponiendo, por ejemplo que $0<\delta<1$ (puede intentar con otro número positivo) ya que de esta manera si $|x-3|<\delta$ ($x\in(3-\delta,3+\delta)$) y así $x\in(2,4)$ *¿por qué?*, luego

$$|x+3| < |x| + 3 < 7 \qquad [2]$$

Usando las relaciones [1] y [2], obtenemos

$$|f(x) - 27/2| = \frac{3}{2}|x+3|\,|x-3| = \frac{21}{2}|x-3| < \frac{21}{2}\delta$$

Luego, para garantizar que $|f(x)-27/2|<\varepsilon$, basta tomar $\frac{21}{2}\delta<\varepsilon$ y $0<\delta<1$(esta condición hay que imponerla porque lo supusimos para obtener la relación [2]), es decir, $0<\delta<\text{mínimo}\{1, \frac{2}{21}\varepsilon\}$.

OBJ 2 PTA 2

Sea f: D⊂IR → IR la función definida por f(x) = Ln (Ln(Ln(x))).

¿Cuál debe ser D, de manera que f resulte continua sobre el mayor (en el sentido de contención) subconjunto posible de IR?

Respuesta.
Como la función g(x) = Ln x es continua en su dominio, de acuerdo a la proposición 10 del texto (p.89) la función f es continua donde esté definida la composición $g_o g_o g$ (¿ por qué ?).

¿ por qué ?

El dominio de g (x) = Ln x es: Dom g = $(0, +\infty)$
El dominio de $(g_o g)$ = Ln(Ln x) es: $\{x\in IR: \text{Ln } x > 0\} = (1, +\infty)$

El dominio de f = Ln(Ln (Ln x)) es: $\{x\in IR: \text{Ln (Ln } x) > 0\} = \{x\in IR: \text{Ln } x > 1\} = (e, +\infty)$

En conclusión D es el intervalo $(e, +\infty)$.

OBJ 3 PTA 3
Sea f :$[0,+\infty) \to$ **R** la función definida por f(x)=$\sqrt{x+1}$. Demuestre usando la definición de derivada que f '(5) = $\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

Respuesta

$$f'(5)= \lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{6+h}-\sqrt{6}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{6+h}+\sqrt{6})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt{6+h}+\sqrt{6})} = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

OBJ 4 PTA 4
Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la función f : $(1,\pi) \longrightarrow$ **R** definida por $f(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)^{\ln(\text{sen}(x))}$.

Respuesta
Tomando logaritmo ln(f(x))=ln(sen(x)) ln($\sqrt{x-1}$) [1]

Derivando la expresión [1] y usando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\text{sen}(x))'}{\text{sen}(x)}\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\text{sen}(x))\frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{x-1}} =$$
$$= \text{ctg}(x)\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\text{sen}(x))\frac{1}{2|x-1|}$$

entoces

$$f'(x)= \left(\text{ctg}(x)\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\text{sen}(x))\frac{1}{2|x-1|}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)^{\ln(\text{sen}(x))}.$$

FIN DEL MODELO

Elaborado por: Chanel Chacón