Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Cálculo I (749)
Fecha: 19/ 02 /2011

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

Sean $f:(1\ ,\ 3)\to IR$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{5-x}$. Demuestra usando ε–δ que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

Respuesta (En la p.21 hay del texto hay un problema similar) .

Sea $\varepsilon > 0$ un número dado. Debemos determinar un número $\delta > 0$, tal que si:

$$1 < x < 3 \quad y \quad 0 < |\,x - 2\,| < \delta, \text{ entonces } |\,f(x) - 1/3\,| < \varepsilon.$$

Ahora bien:

$$|\,f(x) - 1/3\,| = \left|\frac{1}{5-x} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{3-5+x}{5-x}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{-2+x}{5-x}\right|$$

Sea $\delta > 0$ cualquier número positivo y sea $x\in(1\ ,\ 3)$ con y $0 < |\,x - 2\,| < \delta$, entonces:

$$1 < x < \delta + 2.$$

Si además suponemos que $\delta < 1$, resulta

$$1 < x < 1 + 2 = 3.$$

En consecuencia $-x > -3$ y así $5 - x > 5 - 3 = 2$. De esta manera:

$$|\,f(x) - 1/3\,| = \frac{1}{3}\left|\frac{-2+x}{5-x}\right| < \frac{1}{3.2}|\,x-2\,| < \frac{\delta}{6}$$

Por lo tanto si se elige $0 < \delta < 1$y si $x\in(1\ ,\ 3)$ y $0 < |\,x - 2\,| < \delta$, entonces para obtener $|\,f(x) - 1/3\,| < \varepsilon$, basta tomar $\dfrac{\delta}{6} < \varepsilon$, es decir $0 < \delta < \text{mín}\ \{6\varepsilon\ ,\ 1\}$.

OBJ 2 PTA 2 (este problemas está propuesto en el libro de problemas).

Considera la función $f: [-1\ ,\ 2] \to IR$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,\ x \in [-1\ ,\ 0] \\ x^2 - 3 & ,\ x \in [0\ ,\ 2] \end{cases}$$

Determina los puntos de continuidad de la función f.

Respuesta

En primer lugar podemos observar que la función f es continua en $[-1\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ 2]$, por ser un polinomio.

El único punto que nos queda por determinar si f es continua es el punto $x_0 = 0$. Pero en este punto, tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 - 3) = 0 - 3 = -3$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

Luego

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

y por lo tanto $\lim_{x\to 0} f(x)$ **no existe** y así f no es continua en $x_0 = 0$.

En conclusión

$$\boxed{f \text{ es continua en } [-1 , 0) \cup (0 , 2],}$$

OBJ 3 PTA 3

Calcular la derivada de la función $f(x) = 2\,\text{sen}^2(x) - 3\cos^2(x)$

Respuesta Ver texto UNA página 157, autoevaluación, ejercicio 4

OBJ 4 PTA 4

Sea $f:(1 , \sqrt{2}) \longrightarrow (0 , \pi/2)$ definida por $f(x) = \text{arc sen } \sqrt{\mathbf{2 - x^2}}$. Usa la Regla de la Cadena para hallar la derivada de la función f.

Respuesta

Sean $h:(0 , 1) \longrightarrow (1 , \sqrt{2})$, $g: (1 , \sqrt{2}) \longrightarrow (0 , \pi/2)$ definidas por:

$$h(x) = \sqrt{2 - x^2} \;, \quad g(x) = \text{arc sen } x.$$

Entonces $f = goh$, g es derivable en el intervalo $(1, \sqrt{2})$ y h es derivable en el intervalo (0, 1), luego por la regla de la cadena (p.164 del texto), tenemos que $f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x))\, h'(x)$.

Por lo tanto:

$$f'(x) = (\text{arc sen } \sqrt{2 - x^2}\,)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{2 - x^2}\,)^2}} (\sqrt{2 - x^2}\,)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{1}{2\sqrt{2 - x^2}} (2 - x^2)'$$

aplicando nuevamente la regla de la cadena

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}\,\sqrt{2 - x^2}}$$

De esta manera, resulta:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}\,\sqrt{2 - x^2}}}$$

OBJ 5 PTA 5
Demuestra sin calcular la derivada, que la derivada de la función f:IR→IR definida por

$$f(x) = (x^5 + 2x^4 - 3x - 1)(0{,}5 - \cos x)$$

se anula en infinitos puntos.

Nota: usa el Teorema de Rolle, justificando que se cumplen **todas** las hipótesis.

Respuesta

La función f es continua en IR (*¿ por que*?) y derivables en IR (*¿ por que*?), además como 0,5 – cos x se anula para infinitos puntos (basta tomar x de la forma $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k entero), entonces f verifica las condiciones del Teorema de Rolle (p.187 del texto) en cualquier intervalo de la forma:

$$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi\right],\ k\ \text{entero.}$$

Por ejemplo:

$$\text{si } k = 0, \text{ tenemos:} \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi\right] = \left[\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{si } k = 1, \text{ tenemos} \left[\frac{\pi}{2}+2\pi\ ,\frac{\pi}{2}+4\pi\right] = \left[5\frac{\pi}{2}\ ,9\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{si } k = -1, \text{ resulta } \left[\frac{\pi}{2}-2\pi\ ,\frac{\pi}{2}\right] = \left[-3\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{si } k = -2, \text{ resulta} \left[\frac{\pi}{2}-4\pi\ ,\frac{\pi}{2}-2\pi\right] = \left[-7\frac{\pi}{2}\ ,-3\frac{\pi}{2}\right],$$

por lo tanto de acuerdo a la tesis del Teorema de Rolle, en cada uno de estos intervalos, existe un punto x_k en el cual la derivada de f se anula.; y así f se anula en infinitos puntos.

OBJ 6 PTA 6
Hallar el polinomio de Taylor del Polinomio $p(x) = x^3 - 16x + 5$ en el punto x = 1.

Respuesta Ver texto UNA página 157, autoevaluación, ejercicio 4

OBJ 7 PTA 7

Determinar los extremos locales y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$, para $x \neq -1$

Respuesta Ver texto UNA página 280, sección 24 ejercicio a)

OBJ 8 PTA 8 Construir la gráfica de la función $\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x)$ en el intervalo $(0, 2\pi)$
Respuesta

$$f'(x) = 2sen(x)\cos(x) + \cos(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)\left[2sen(x)+1\right]$$

$$si\ f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x)\left[2sen(x)+1\right] = 0 \Rightarrow$$

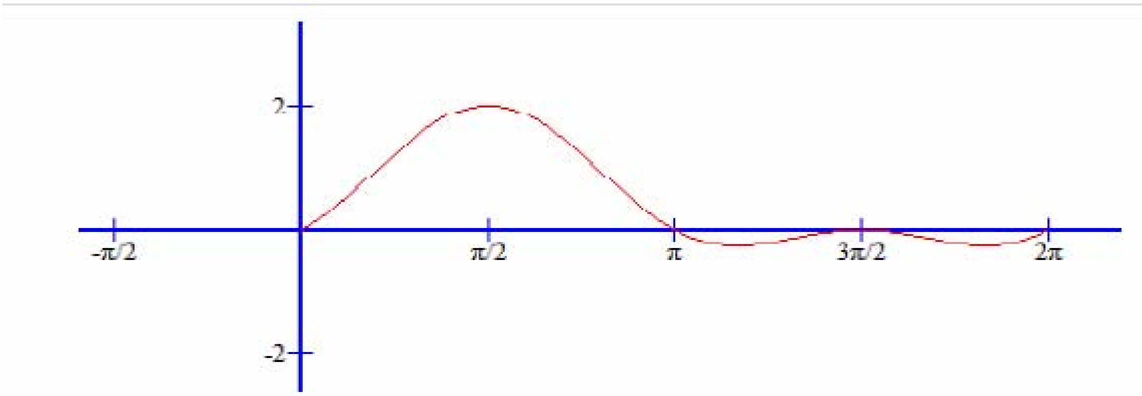
$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{2}(v.c.); x = \tfrac{3\pi}{2}(v.c.)$$

$$2sen(x)+1 = 0 \Rightarrow sen(x) = \tfrac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}(v.c.); x = \frac{7\pi}{6} + \pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$$

luego

INTERVALO	f (X)	f′(X)	RESUMEN
$(0,\frac{\pi}{2})$		+	↗ (crece)
$x = \frac{\pi}{2}$	2		Máximo Relativo
$(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6})$		-	↘ (decrece)
$x = \frac{7\pi}{6}$	$\frac{-1}{4}$		Mínimo Relativo
$(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2})$		+	↗ (crece)
$x = \frac{3\pi}{2}$	0		Máximo Relativo
$(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6})$		-	↘ (decrece)
$x = \frac{11\pi}{6}$	$\frac{-1}{4}$		Mínimo Relativo
$(\frac{11\pi}{6},2\pi)$		+	↗ (crece)

graficando



FIN DEL MODEO DE RESPUESTAS