Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área de Matemática

Cálculo I (749)
Fecha: 23/ 07 /2011

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

Sea $f:(-1,1) \longrightarrow \mathrm{IR}$ una función tal que $\dfrac{2\,\mathrm{sen}(2x)}{x} \le f(x) \le 4+x^2$, $x \in (-1,1)$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Respuesta.

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,\mathrm{sen}(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,\mathrm{sen}(2x)}{2x} = 4 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{sen}(2x)}{2x} = 4$ y $\lim\limits_{x\to 0} 4 - x^2 = 4$

De acuerdo con la proposición 4, página 34 del texto (límites intercalados)

$$4 = \lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(2x)}{x} \le \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} 4 - x^2 = 4$$

entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$.

OBJ 2 PTA 2

Demostrar que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo $[-1\ ,\ 1]$

Respuesta.

Para resolver este problema consideraremos varios casos

Sea $\mathbf{a} \in [-1\ ,\ 1]$. Para estudiar la continuidad de la función f en el punto **a**, consideramos varios casos

a) Si $-1 < a < 1$, podemos resolver el problema de la continuad de f de varias maneras:

¿Por qué ?

1era manera

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (1-\sqrt{1-x^2}) = 1 - \lim_{x\to a} \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-a^2} = f(a).$$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ entonces f en continua para todo $a \in (-1,1)$.

2da manera

Otra forma de atacar este problema es considerando la proposición 10 de la página 89 del texto.

Consideremos las funciones $h:(-1,1)\to(-1,1)$, y $g:(-1,1)\to \mathrm{IR}$, definidas por $h(x) = 1-x^2$, $g(x) = 1-\sqrt{x}$, entonces h y g son funciones continuas (*¿por qué ?*), luego de acuerdo a la proposición 10, tenemos que la función compuesta $g(h(x)) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ es continua en el intervalo $(-1,1)$.

b) $a = -1$.

Calculemos el límite de f por la derecha en $a = -1$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (1-\sqrt{1-x^2}) = 1 - \lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-1} = 1 = f(-1).$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ entonces f en continua por la derecha de -1.

c) a = 1

Calculemos el límite por la izquierda en a =1 :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-\sqrt{1-x^2}) = 1-\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-1} = 1 = f(1)$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ entonces f en continua por la izquierda de 1.

Así finalmente f es continua en $[-1\ ,\ 1]$.

OBJ 3 PTA 3

Calcular la derivada de la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2-a}{x^2+b}$

Respuesta

Ver libro texto UNA (700), pag 157, Autoevalucion ejercicio 3

OBJ 4 PTA 4

Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de la función $f : (1,\pi) \to \mathbf{R}$ definida por

$f(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)^{\ln(\mathrm{sen}(x))}$ [1].

Respuesta

Tomando logaritmo en ambos miembros de [1], tenemos $\ln(f(x)) = \ln(\mathrm{sen}(x))\ln(\sqrt{x-1})$ [2]

Derivando la expresión [2] y usando la regla de la cadena y la derivada de un producto de funciones, tenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\mathrm{sen}(x))'}{\mathrm{sen}(x)}\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\mathrm{sen}(x))\frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{x-1}}$$

Desarrollando la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mathrm{ctg}(x)\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\mathrm{sen}(x))\frac{1}{2|x-1|}.$$

Entoces

$$f'(x) = \left(\mathrm{ctg}(x)\ln(\sqrt{x-1}) + \ln(\mathrm{sen}(x))\frac{1}{2|x-1|}\right)\left(\sqrt{x-1}\right)^{\ln(\mathrm{sen}(x))}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es usando el ejemplo **e)** de la pág166 del texto.

OBJ 5 PTA 5

Usar el teorema de Lagrange para demostrar que $\mathrm{Ln}\ x \le x-1$, $x > 0$.

Respuesta

En primer lugar podemos observar que la desigualdad es cierta para x = 1 (en este caso tenemos una igualdad Ln 1 = 0 = 0 – 1 = 0).

Para demostrar la desigualdad para los otros valores de “x”, consideremos dos casos: x > 1 y x < 1.

Caso 1: x >1

Sea $x > 1$. Como la función logaritmo es continua en el intervalo $[1, x]$ y diferenciable en el intervalo abierto $(1, x)$, podemos aplicar el teorema de Lagrange (pág 193 del texto), en consecuencia, existe $x_0 \in (1, x)$, tal que:

$$f(x) - f(1) = f'(x_0)\,(x$$

Aquí f es la función logaritmo

luego:

$$\text{Ln } x - \text{Ln } 1 = (1/x_0)\,(x - 1),$$

es decir:

$$\text{Ln } x = (1/x_0)\,(x - 1).$$

Como $x_0 \in (1, x)$, se tiene $1/x_0 < 1$ y en consecuencia:

$$\text{Ln } x \le x - 1,\; x > 1.$$

Caso 2: <u>$x < 1$</u>

En este caso se procede en forma similar al caso 1, aplicando el teorema a la función logaritmo en el intervalo $[x, 1]$ *.*

OBJ 6 PTA 6

Hallar la fórmula de Taylor del polinomio $f(x) = x^3 - 16x + 5$ en el punto $x = 1$.

Respuesta

Ver libro texto UNA (700), pag 257, Autoevalucion ejercicio 1

OBJ 7 PTA 7

Determinar los mínimos o máximos locales de $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Respuesta

Ver libro texto UNA (700), pag 271, Ejemplo b, seccion 18.

OBJ 8 PTA 8

Construir la gráfica de la función definida por $f(x) = 2x\sqrt{1 - x}$, $(x \le 1)$

Respuesta

Ver libro texto UNA (700), pag 306, Ejercicio resuelto 3, seccion 30.

FIN DEL MODEO DE RESPUESTAS