Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

CÁLCULO I (749)
Cód. Carrera: 508
Fecha: 21/01/12

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1, 2, 3 y 4.

OBJ 1 PTA 1 Determine el valor de $a \in IR$ de modo que $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - |x-a| - a^2}{|x-a|}$ exista.

<u>Solución</u>:

Notemos que $|x-a| = \begin{cases} x-a & \text{si } x > a \\ -(x-a) & \text{si } x < a \end{cases}$

Calculemos los límites laterales

$$\begin{aligned} L_+ = \lim_{x\to a^+} \frac{x^2 - |x-a| - a^2}{|x-a|} &= \lim_{x\to a^+} \frac{x^2 - a^2 - (x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{x^2 - a^2 - (x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a^+} \frac{(x-a)(x+a-1)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a^+} x+a-1 \\ &= 2a-1 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} L_- = \lim_{x\to a^-} \frac{x^2 - |x-a| - a^2}{|x-a|} &= \lim_{x\to a^-} \frac{x^2 - a^2 - (-(x-a))}{-(x-a)} \\ &= \lim_{x\to a^-} \frac{x^2 - a^2 + (x-a)}{-(x-a)} \\ &= \lim_{x\to a^-} \frac{(x-a)(x+a+1)}{-(x-a)} \\ &= \lim_{x\to a^-} -(x+a+1) \\ &= -(2a+1) \end{aligned}$$

Luego L existe si y solo si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, es decir, $2a - 1 = -(2a + 1)$ de donde $a = 0$. Por lo tanto, el límite existe si y solo si *a = 0*.

OBJ 2 PTA2 Sea la función f definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x\leq 1\\[2ex] \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$

Determine el conjunto de puntos donde la función f es continua.

<u>Solución</u>:

(i) $f(1)=-1$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{1-2}=-1$ (*)

(iii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1$ (**)

De (*) y (**) deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, por lo tanto f es descontinúa en 1.

Por otro lado

- $\dfrac{1}{x-2}$ no existe cuando x = 2, pero el dominio es (-∞,1] de aquí que f es continua para x < 1 ¿por qué?
- $\dfrac{1}{x}$ no existe cuando x = 0, pero el dominio aquí es (1,+∞), luego f es continua para x > 1 ¿por qué?

De lo anterior podemos concluir que f es continua en todo número excepto en x = 1, es decir, f es continua en el conjunto $IR-\{1\}$

OBJ 3 PTA 3

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$ en el punto $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$.

b) Sea la función f definida por $f(x)=\dfrac{\sec(x)}{1+tg(x)}$, determine los valores de x para los cuales la derivada de f es nula, es decir, $f'(x) = 0$.

NOTA: Para el logro de este objetivo es necesario responder correctamente las dos partes.

<u>Solución</u>:

a) De acuerdo con la regla del cociente tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

De modo que la pendiente de la recta tangente en $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $\left(1, \frac{e}{2}\right)$ es horizontal y su ecuación es $y = \frac{e}{2}$.

b) La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{\sec(x)\left[\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}^2(x) - \sec^2(x)\right]}{\left(1 + \operatorname{tg}(x)\right)^2}$$

Usando la identidad $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ tenemos que

$$f'(x) = \frac{\sec(x)\left[\operatorname{tg}(x) - 1\right]}{\left(1 + \operatorname{tg}(x)\right)^2}$$

Veamos para cuales punto $f'(x) = 0$. Como sec(x) nunca es 0, entonces $f'(x) = 0$ cuando $\operatorname{tg}(x) - 1 = 0$ y esto sucede cuando $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ donde n es un entero.

En conclusión $f'(x) = 0$ si $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ donde n es un entero.

OBJ 4 PTA 4 Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$ con $x > 3$. Calcule $\frac{df}{dx}$, usando la regla de la cadena.

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \cdot \frac{\left[\sqrt{x-2} - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right).(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{x-2}$$

$$= \frac{(x-2) - \left(\frac{1}{2}\right).(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1).(x-2)}$$

FIN DEL MODELO