Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

CÁLCULO I (749)
Cód. Carrera: 508
Fecha: 14 / 04 / 12

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 1 al 8

OBJ 1 PTA 1 Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{|ax - 1| - |ax + 1|}{x}, \quad \text{con } 0 < a < 1$$

Solución:

Como x es un número muy cercano a cero, se tiene que $ax - 1 < 0$ y $ax + 1 > 0$. (Ya que, si $ax - 1 > 0$, entonces $x > \frac{1}{a}$ y como $0 < a < 1$ se tiene que $\frac{1}{a} > 1$ de aquí que $x > 1$, lo que no puede ser, pues x es un número muy cercano a cero, de manera similar se comprueba que $ax + 1 > 0$).

De lo anterior,

$$|ax - 1| = -(ax - 1) = -ax + 1$$
$$|ax + 1| = ax + 1$$

luego

$$\lim_{x \to 0} \frac{|ax - 1| - |ax + 1|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(ax - 1) - (ax + 1)}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{-ax + 1 - ax - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2ax}{x} = \lim_{x \to 0} (-2a) = -2a$$

OBJ 2 PTA 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{ax + b} & \text{si } 0 < x < 1 \\ -5b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

Calcule los valores de a y b de modo que f sea continua.

Solución:

Para $x < 0$, $f(x)$ es continua, pues es una función constante $(f(x) = 1)$

Elaborado por: Belkys Escobar

Para $0 < x < 1, f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ es continua, excepto posiblemente el en punto x_0 tal que $ax_0 + b = 0$ ó $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Para $x > 1$, $f(x) = -5b$ es continua, pues es una función constante.

Analicemos la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{b}$$

Para que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ exista, los límites laterales deben ser iguales. Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 1$$

En $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+1} \quad (\text{pues } b = 1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (-5b) = -5b = -5 \quad (\text{pues } b = 1)$$

Así,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a+1} = -5 \Rightarrow 1 = -5a - 5 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

Finalmente, se observa que $x_0 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-\frac{6}{5}} = \dfrac{5}{6} \in (0,1)$, por tanto debemos excluirlo del intervalo; así la función f es continua en todos los reales excepto en $x_0 = \dfrac{5}{6}$. Luego la función f queda definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{-\frac{6}{5}x + 1} & \text{si } 0 < x < 1, \quad x \ne \dfrac{5}{6} \\ -5 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

OBJ 3 PTA 3 Determinar los coeficientes a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Sea derivable en el punto x = 1. Comprobar el resultado gráficamente.

Solución:

La función derivada ha de ser $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ a & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ para lo cual se ha de cumplir:

$$\begin{cases} f(1^-) = f(1^+) \;\Rightarrow\; a + b = 2 \\ f'(1^-) = f'(1^+) \;\Rightarrow\; a = 2 \end{cases} \quad \text{de aquí que } a = 2 \text{ y } b = 0$$

Luego,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases} \;\Rightarrow\; f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

La continuidad significa que los dos tramos de la curva están empalmados. La derivabilidad significa que el empalme se ha hecho con *suavidad*, es decir, con una tangente común.

OBJ 4 PTA 4 Dada la función $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}}\right)$. Pruebe si se cumple la siguiente igualdad

$$f'(x) = -\sec(x)$$

Solución:

Hagamos ciertas operaciones en la expresión original de la función antes de derivar

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}} = \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1 - \operatorname{sen}(x)) - \ln(1 + \operatorname{sen}(x))\right],$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-2\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}^2(x)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{-2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{2}\,\frac{-2}{\cos(x)} = -\sec(x) \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que si se cumple la igualdad $f'(x) = -\sec(x)$.

OBJ 5 PTA 5 Sea $f : [a, b] \to IR$ continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en $[a, b]$.

Supongamos que el segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta la gráfica de f en un punto $(c, f(c))$ con $a < c < b$. Demuestra que existe algún punto $d \in (a, b)$ tal que $f''(d) = 0$.

Solución:

Basta aplicar el teorema del valor medio a f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para obtener que hay puntos $u \in (a, c)$, $v \in (c, b)$ tales que

$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad f'(v) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Como los puntos $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ y $(b, f(b))$ están alineados, es decir, están sobre una misma recta entonces se cumple:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Por tanto $f'(u) = f'(v)$.

Aplicamos ahora el teorema de Rolle a f' en $[u, v]$, para concluir que hay algún $d \in (u, v)$ tal que $f''(d) = 0$.

OBJ 6 PTA 6 Halle la fórmula de Taylor de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en el punto $a = \frac{\pi}{3}$.

Solución:

Derivando $f(x) = \text{sen}(x)$ se obtiene

$f'(x) = \cos(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'''(x) = -\cos(x) = \text{sen}(x + 3\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

$f^{IV}(x) = \text{sen}(x) = \text{sen}(x + 4\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^{IV}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

:

$f^n(x) = (\text{sen}(x))^n = \text{sen}(x + n\frac{\pi}{2}) \Rightarrow f^n(\frac{\pi}{3}) = \text{sen}(\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2})$

por lo tanto, el n-simo polinomio de Taylor de f en $a = \frac{\pi}{3}$ es:

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \ldots + \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^n$$

y el resto $R_n(x) = \dfrac{f^{\,n+1}(c)}{(n+1)!}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^{n+1} = \dfrac{\operatorname{sen}(c + (n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^{n+1}$, donde c es un punto "entre **a** y **x**"

Luego

$$\operatorname{sen}(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

OBJ 7 PTA 7 Calcule sen (61º) con un error menor que 10^{-8}.

<u>Solución</u>:

Lo primero que hay que hacer es expresar el seno en radianes. Tenemos que

$$\operatorname{sen}(61^{o}) = \operatorname{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

Claramente, debemos elegir $a = \pi/3$. El error que se comete al aproximar $\operatorname{sen}\left(\dfrac{61\pi}{180}\right)$ por el correspondiente valor del polinomio de Taylor $T_n(x)$ viene dado por

$$\frac{\left|\operatorname{sen}^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left|x - a\right|^{n+1} \le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{100}\right)^{n+1} \text{ con } a = \frac{\pi}{3}, x = \frac{61\pi}{180}$$

Donde hemos tenido en cuenta que las derivadas del seno están acotadas por 1 y que $\dfrac{\pi}{180} < \dfrac{3,5}{180} < \dfrac{2}{100}$. Deducimos que basta tomar n = 3 para que el error cometido al aproximar $\operatorname{sen}\left(\dfrac{61\pi}{180}\right)$ por el valor del polinomio de Taylor $T_3\left(\dfrac{61\pi}{180}\right)$ sea menor que 10^{-8}.

OBJ 8 PTA 8 Representar la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 4}{x - 1}$

<u>Solución</u>:

Dominio: $\mathbb{R}$ - {1}

Simetría: $f(-x) = \dfrac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \dfrac{x^2 + x - 4}{-x - 1}$, no presenta

Puntos de cortes con los ejes.

Punto de corte con OX:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, 0\right) \qquad \left(\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, 0\right)$$

Punto de corte con OY:

$$f(0) = \frac{0^2 - 0 - 4}{0 - 1} = 4, \quad (0,4)$$

Asíntotas.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \infty$$ No tiene

Asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 1} = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1} = \infty$$ $x = 1$

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} = \frac{\dfrac{x^2 - x - 4}{x - 1}}{x} = 1, \quad n = \lim_{x\to\infty} = \left(\frac{x^2 - x - 4}{x - 1} - x\right) = 0, \quad y = x$$

Crecimiento y decrecimiento. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$ $x^2 - 2x + 5 = 0$ sin solución real

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

Máximos y mínimos. No existen extremos locales

Concavidad y convexidad. $f''(x) = \dfrac{-8}{(x-1)^3} = 0$ sin solución

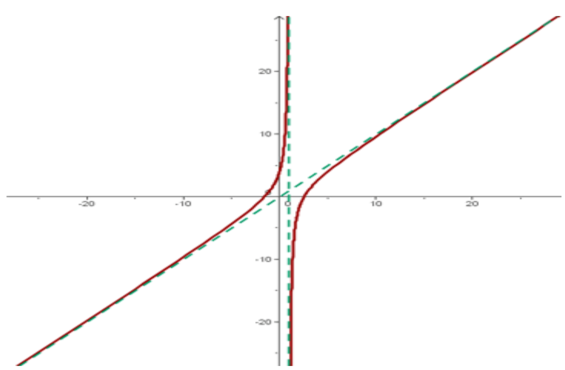
Cóncava: $(-\infty, 1)$

Convexa: $(1, \infty)$

Puntos de inflexión.

No hay punto de inflexión

Representación gráfica.



FIN DEL MODELO

Elaborado por: Belkys Escobar