Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Matemática II(178)
Segunda Prueba Parcial
Fecha: 18-06-2011

PREGUNTAS Y RESPUESTAS

OBJ 6 PTA 1

Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) A^3

b) Demuestre que $A^3 + I_3 = 0$

c) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcule A^{10}

NOTA: Para el logro del objetivo Nº 6 se debe responder correctamente dos de las tres partes de la pregunta

RESPUESTA

a) Aplicando multiplicación de matrices ***(Ver Pág. 71 del modulo III. Matemática II texto UNA)*** tenemos:

$$\mathbf{A^2=A.A} \Rightarrow \mathbf{A^2=}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{.}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 0+3-4 & 0-12+12 & 0-15+16 \\ 0-4+5 & 3+16-15 & 4-20-20 \\ 0+3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Además:

$$\mathbf{A^3= A^2.A} \Rightarrow \mathbf{A^3=}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{.}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^3=}\begin{pmatrix} 0+0-1 & -3+0+3 & -4+0+4 \\ 0+4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ 0-3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & -1+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, es decir, la matriz nula

Otra forma para demostrar que $A^3 + I_3 = 0 \rightarrow A^3 = -I_3$

En efecto:

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -I_3$$

c) $A^{10} = A^9 . A = (A^3)^3 . A = (-I_3)^3 . A = -I . A = -A$

Finalmente:

$$A^{10} = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

OBJ 7 PTA 2

Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

RESPUESTA

La matriz ampliada del sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

Reduciendo la matriz ampliada de sistema realizando operaciones por filas ***(Ver Pág. 120 del modulo III. Matemática II texto UNA***) se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) f_2]{f_2 \rightarrow f_2 - \left(\frac{1}{2}\right) f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \rightarrow f_{3-} 3 f_1]{f_2 \rightarrow \left(\frac{2}{7}\right) f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5/2 & 5/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\to\left(\frac{2}{5}\right)f_3}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[f_2\to -f_2]{f_3\to f_3-f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ con lo cual podemos observar que el número de ecuaciones es igual al número de columnas, por lo que existirá única solución.

$$\xrightarrow{f_1\to f_{1+}\left(\frac{3}{2}\right)f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es: $x = 3, y = -1$

OBJ 8 PTA 3

Una empresa de taxis que recién inicia operaciones en Venezuela está promocionando la renta por hora de los mismos en el perímetro de la ciudad. El propietario dispone de 40 carros y puede rentarlos a 100 Bs c/u. Sin embargo, observa que puede incrementar en 5 Bs el precio por cada vez que renta un carro menos. Determine:

a.-La función Ingreso

b- ¿Cuántos carros debe rentar para obtener un máximo ingreso?

NOTA: Para el logro del objetivo Nº 8 se debe responder correctamente todos las partes de la pregunta

RESPUESTA

a) Sea q el número de taxis rentados y p el número de taxis no rentados, se debe determinar el ingreso por la renta de un taxi en una hora. En efecto:

Se disponen de 40 taxis, la renta de un taxi originalmente es de 100 Bs y el incremento por un taxi no rentado es de 5 Bs. Así, el ingreso por "p" taxis no rentados viene dado por: 5p y el ingreso por la renta de un taxi será: 100 + 5p. De este modo, la función Ingreso I (q) se obtiene multiplicando el ingreso que resulta de la renta de un taxi por el número de unidades de taxis a rentar ***(Ver Pág. 23 del modulo IV Matemática II (178) aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas***), es decir,

$I(q) = (100+5p).q$ donde $p = 40-q$

$I(q) = \left[100+5(40-q)\right].q \Rightarrow I(q) = (300-5q).q$

$I(q) = -5q^2 + 300q$

b) Como la función Ingreso es una función cuadrática, es derivable en todo su dominio, así:

$I'(q) = -10q + 300$. Como se quiere obtener el máximo ingreso por la renta de un taxi, entonces:

$I'(q) = 0 \Rightarrow = -10q + 300 = 0 \Rightarrow q = 30$, luego:

$I(q)_{máx} = -5(30)^2 + 300(30) = 4500Bs$

Nótese que no se rentan 10 taxis **(p=10),** así la renta de un taxi es:

100 + 5p=100 + 5(10)= 150 Bs

OBJ 9 PTA 4

La tabla de relaciones intersectoriales en millones de dólares de la economía de un país es la siguiente:

SECTOR PRODUCTOR	SECTOR COMPRADOR			Uso Final	Uso Total
	Agricultura	**Industria**	**Servicios**		
Agricultura	11	19	1	10	41
Industria	5	89	40	106	240
Servicios	5	37	37	106	185
Insumos Primarios	20	95	107		
Producción Total	41	240	185		

a) Haga un comentario general sobre las diferentes relaciones intersectoriales dadas en la tabla
b) Determine la matriz tecnológica
c) Encuentre la matriz de Leontief

NOTA: Para el logro del objetivo N° 9 se debe responder correctamente dos de las tres partes de la pregunta

RESPUESTA

a) De la matriz insumo-producto dada en la tabla observamos:

- El sector agrícola compra a su mismo sector 11 mil millones de dólares, al sector industrial le compró 5 mil millones de dólares, y al sector servicio le compró 5 mil millones.
- El sector servicio le compro al sector agrícola 1 mil millones de dólares, al sector industrial le compro insumos por un valor de 40 mil millones y se compró a si mismo 37 mil millones de dólares en insumos.
- Por otra parte el sector industrial vendió al sector agricultura 5 mil millones de dólares, y también le vendió a su mismo sector 89 mil millones, finalmente le

vendió al sector servicios 40 mil millones de dólares. Parte de la producción del sector industrial fue directamente al consumidor por un valor de 106 mil millones de dólares.

- La producción total del sector industrial del año que se trata fue de 240 mil millones de dólares. ***Se deja al estudiante UNA que añada otros comentarios referentes a los otros sectores.***

b) Para obtener los coeficientes de la matriz tecnológica se divide cada cifra de cada sector representado en cada columna entre el total de cada columna que representa a cada sector. (***Ver Pág.77 del modulo IV Matemática II (178) aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas***). De esta forma, se tiene que la matriz de coeficientes tecnológicos a_{ij} es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ de donde : } a_{11} = \frac{11}{41} = 0,268 \quad , \quad a_{12} = \frac{19}{240} = 0,079 \quad , \quad a_{13} = \frac{1}{185} = 0,005,$$

$$a_{21} = \frac{5}{41} = 0,122, \quad a_{22} = \frac{89}{240} = 0,371 \quad , \quad a_{23} = \frac{40}{185} = 0,216$$

$$a_{31} = \frac{5}{41} = 0,122, \quad a_{32} = \frac{37}{240} = 0,154 \quad , \quad a_{33} = \frac{37}{185} = 0,200$$

Luego: $$A = \begin{pmatrix} 0,268 & 0,079 & 0,005 \\ 0,122 & 0,371 & 0,216 \\ 0,122 & 0,154 & 0,200 \end{pmatrix}$$

c) A la matriz (I−A) se le conoce como ***matriz de Leontief.*** (***Ver Pág.83 del modulo IV Matemática II (178) aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas***). Así:

$$I-A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,268 & 0,079 & 0,005 \\ 0,122 & 0,371 & 0,216 \\ 0,122 & 0,154 & 0,200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,732 & -0,079 & -0,005 \\ -0,122 & 0,629 & -0,216 \\ -0,122 & -0,154 & 0,800 \end{pmatrix}$$

.

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

E.M/11-1