Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Matemática II 178
Prueba Integral
Fecha: 19-2-11

Preguntas y respuestas

OBJ 1 PTA 1

Considere la función $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ -x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$. ¿Existe el $\lim_{x\to 0} f(x)$? Razone su respuesta.

Solución:

Observamos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2) = 0$. Como ambos límites laterales existen y son *iguales* concluimos que el límite existe y es igual a 0.

OBJ 2 PTA 2

Verifica que

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = 1.$$

Solución:

En este caso tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usando el procedimiento indicado en el cuadro de la p.67 del texto (Módulo I), tenemos:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\,(f(x)-1)}$$

En nuestro caso $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = x$. Entonces

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right) = \lim_{x\to\infty} x\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = e^0 = 1.$$

Elaborado por: José Gascón

OBJ 3 PTA 3

Para el logro de este objetivo debes responder correctamente dos opciones.

Sea $g:[0\ ,\ 1]\to IR$ una función continua A continuación se hacen varias afirmaciones que involucran a la función g.. Indica con una **V** o una **F** en el espacio correspondiente, según que la afirmación sea verdadera o falsa, respectivamente.

a. g alcanza al menos un máximo en el intervalo [0 , 1] _____

b. Si g(1) = 5, entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 5$ _____

c. La función $h:[0,1]\to IR$, definida por: $h(x) = 2g(x) + x^2$ **no es** necesariamente continua en el intervalo [0 ,1]

Solución:

a. V De acuerdo al Teorema 3.3 de la p. 115 del texto (Módulo I), toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza máximo y mínimo.

b. V Como g es continua en el intervalo [0 , 1], de acuerdo alo expuesto en la página 100 del texto (Módulo I), sobre continudad en intervalos cerrados se tiene que:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = 5$$

c. F Como las funciones g y $m(x) = x^2$ son funciones continuas en el interavlo [0 , 1], entonces usando el álgebra de funciones continuas (ver p.104 del texto (Módulo I)) la función h es cotinua en el intervalo [0 , 1].

OBJ 4 PTA 4

Calcular la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{(x^2 + \operatorname{Ln} x)}$$

Solución:

Observamos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{(x^2 + \operatorname{Ln} x)}$$

se puede escribir como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{(x^2 + \operatorname{Ln} x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{(x^2)}e^{\operatorname{Ln} x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\ e^{(x^2)}x = \sqrt{x}e^{(x^2)}$$

y ahora calculamos la derivada propuesta. Vemos que

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}e^{(x^2)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{(x^2)} + 2x\sqrt{x}e^{(x^2)}$$

OBJ 5 PTA 5

Al usar el método de Newton para hallar una aproximación de $\sqrt{5}$, tomando como primera aproximación $x_0 = 2$, se obtiene el valor:

a. 1 b. 2 c.1.5 d. 1,75

Solución:

Tenemos que $\sqrt{5}$ es la única raíz de la ecuación $\mathbf{x^2 - 5 = 0}$. Si tomamos g:IR→IR, definida por $g(x) = x^2 - 5$, entonces g cumpla las condiciones para aplicar el Método de Newton en cualquier intervalo $(a, +\infty)$ con $a > 0$. (g es derivable $g'(x) = 2x > 0$, $x > 0$ (ver p.118 del texto (Módulo II)) y las aproximaciones se obtienen por la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

(geométricamente x_{n+1} es el punto de corte con el eje de las abcisas de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(x_n, g(x_n))$)

En nuestro caso como

$$g'(x) = 2x,$$

tenemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 2 - \frac{2^2-5}{2.2} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Opción Correcta la **d**

OBJ 6 PTA 6

Determina, si es posible, una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a & b & c \end{pmatrix},$$

la condición pedida se cumple si

$$\begin{pmatrix} a+x & b+y & c+z \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir

$$a+x=0 \quad [1] \quad , \quad b+y=1 \quad [2] \quad , \quad c+z=2 \quad [3] \quad , \quad a=-1 \ , \quad b=0 \quad , \quad c=1$$

Sustituyendo los valores de a, b y c en [1], [2] y [3], respectivamente y despejando, obtenemos:

$$x=1 \quad , \quad y=1 \quad , \quad z=-1.$$

Por lo tanto, la condición pedida se cumple si:

$$\boxed{a=-1 \ , \ b=0 \ , \ c=1 \ , x=1 \ , \ y=1 \ , \ z=-1}$$

OBJ 7 PTA 7

Usar el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x+\ 2y-2z+3w=1 \\ 3x+y-\ z+2w=3 \\ 3x+3y+3z-3w=5 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -F_1 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -7 & 6 \end{array}\right)$$

De aquí vemos que el sistema tiene infinitas soluciones e invitamos al estudiante UNA a que termine el proceso de Gauss-Jordan para hallar las mismas.

OBJ 8 PTA 8

Un empresario ha determinado que el costo total C de funcionamiento de su fábrica es $C(q)=0.5q^2 + 15q + 5000$ donde q es el número de unidades fabricadas. ¿A qué nivel de producción es mínimo el costo medio por unidad?

Solución:

Determinemos la función costo medio $\overline{C}(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, $q > 0$. Luego

$$\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q} = 0.5\,q + 15 + \frac{5000}{q} \text{ entonces } \overline{C}'(q) = 0.5 - \frac{5000}{q^2} \Rightarrow \overline{C}'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 100$$

El valor $q = 100$ representa el número de unidades de producción para que el costo medio sea mínimo. Nota: el alumno debe comprobar que este valor es el mínimo, utilizando cualquier método, y lo puede hacer aplicando por ejemplo el criterio de la primera derivada

$\overline{C}'(q) < 0$ en el intervalo $(0,100)$ y $\overline{C}'(q) > 0$ en $(100, \infty)$

OBJ 9 PTA 9

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el vector de demanda $d = (30 \quad 20 \quad 40 \quad 10)$ o sea una matriz 1x4. El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el vector de precios (en miles de B^s) $p = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$ una matriz 4x1. Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución:

De acuerdo a la definición el ingreso viene dado por: $I = (30 \quad 20 \quad 40 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto de matrices, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= 30(20) + 20(15) + 40(18) + 10(40) \\ &= 600 + 300 + 720 + 400 \\ &= 2020 \text{ miles de } B^s \end{aligned}$$

Luego, el fabricante recibirá 2020 miles de B^s

FIN DEL MODELO