**Universidad Nacional Abierta**
**Vicerrectorado Académico**
**Área De Matemática**

**Matemática II(179)**
**Prueba Integral**
**Fecha: 23-07-2011**

# PREGUNTAS y RESPUESTAS

**OBJ 1 PTA 1**

Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ y $g(x)=\sqrt[3]{4-3x^2}$ .

Calcular, usando el **ÁLGEBRA DE LÍMITES**: $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]$

**RESPUESTA**

Aplicando la propiedad Nº 1 de la tabla 1.1 **(ver pág. 38 texto UNA Matemática II . Modulo I),** se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to 0} f(x)-\lim_{x\to 0} g(x)$$

Calculemos: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ .

Aplicando la propiedad Nº 1 de la tabla 1.2 **(ver pág. 40 texto UNA Matemática II . Modulo I):**

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+1}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(x^3+1)}=\sqrt{0^3+1}=\sqrt{1}=1$$

Por otra parte:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{4-3x^2}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}(4-3x^2)}=\sqrt[3]{4-3(0)^2}=\sqrt[3]{4-0}=\sqrt[3]{4}$$

Luego:

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to 0} f(x)-\lim_{x\to 0} g(x)=\boxed{1-\sqrt[3]{4}}$$

**OBJ 2 PTA 2**

Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

**RESPUESTA**

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$ presenta una indeterminación de la forma: $\dfrac{\infty}{\infty}$ **( Ver pág. 57. texto UNA Matemática II . Modulo I )**

Dividimos numerador y denominador por $\sqrt{x}$ :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}}}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

**OBJ 3 PTA 3**

Dada la función f(x) definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x+2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine el valor del parámetro $\underline{a}$ para que f(x) sea continua en x= 0

**RESPUESTA**

Una función f(x): $R \to R$ es continua en **x=x₀** si cumple con las siguientes condiciones:
**(Ver Pág. 99 texto UNA Matemática II . Modulo I):**

1) f(x) está definida en **$x=x_0$**
2) Existe un número L , tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$
3) f(x) = $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

Independientemente del valor que tome el parámetro:

- Para valores menores que cero, la función *f* está definida como función exponencial, continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en el intervalo $(-\infty,0)$.
- Para valores mayores que cero, la función *f* está definida como función lineal, continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en el intervalo $(0,+\infty)$.
  En consecuencia, nuestra función es continua en $\mathbb{R}^*$ para cualquier valor del parámetro.
  Veamos que ocurre en el punto $x = 0$ en el cual existe un cambio de definición de la función:
- Estudiamos la existencia de límite: para que exista límite, los límites laterales deberán ser iguales

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} e^{ax} &= e^{a\cdot 0} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} (x+2a) &= 0+2a = 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

Solamente existe límite en el punto $x=0$ para el valor de $a=\frac{1}{2}$ y, por tanto, solo podrá ser continua en el punto $x=0$ para ese valor.

- Resumiendo:

Si $a=\frac{1}{2}$, la función es continua en todo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Si $a\neq\frac{1}{2}$, la función es continua en todo el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ menos en el punto $x=0$: $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$.

**OBJ 4 PTA 4**

Calcular la derivada de la función **f(x)=** $3^x.\cos(x^2-1)$

**RESPUESTA**

$f'(x)=(3^x)'.\cos(x^2-1)+3^x.\left[\cos(x^2-1)\right]'$ **( Ver propiedad de la derivada del producto de dos funciones . pág. 56 del texto UNA Matemática II . Modulo II)**

$(3^x)'=3^x.\ln 3$, $\left[\cos(x^2-1)\right]'=-sen(x^2-1).(x^2-1)'=sen(x^2-1).2x$ **( Ver tabla de derivadas de algunas funciones elementales. pág. 53 y la regla de la cadena. Teorema 4.2 pág. 62)**

$$f'(x)=3^x.\ln 3.\cos(x^2-1)-3^x.sen(x^2-1).2x \rightarrow \boxed{f'(x)=3^x.\left[\ln 3.\cos(x^2-1)-2x.sen(x^2-1)\right]}$$

**OBJ 5 PTA 5**

Realizar el estudio completo y la representación grafica de la función $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2}$.

**<u>SUGERENCIA:</u>** Estudiar el dominio, simetría, puntos de cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad

**RESPUESTA**

**a) Dominio de f(x):** $\mathbb{R}-\{0\}$

**b) Simetría:**

$f(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{(-x)^2}=f(x)$, con lo cual la gráfica de f(x) es simétrica respecto al eje y

**c) Puntos de Cortes:**

No hay puntos de cortes con el eje x ni con el eje **y** **¿¿¿¿¿¿POR QUÉ?????**

**d) Asíntotas:**

**Asíntotas verticales**

$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+1}{x^2}=\infty$, luego **x=0** es asíntota vertical de f(x)

**Asíntotas horizontales**

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4+1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}}=\infty$, luego la grafica de f(x) **no** tiene asíntotas horizontales

**Asíntotas Oblicuas**

la grafica de f(x) **no** tiene asíntotas oblicuas **¿¿¿¿¿¿POR QUÉ?????**

**e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento**

Recordemos la definición de Intervalo de Crecimiento y Decrecimiento (**Ver pág. 109. del texto UNA Matemática II. Modulo II):** f(x) es creciente en aquellos intervalos en que f′ (x) $\geq 0$ y es decreciente para aquellos intervalos en que f′ (x) $\leq$ 0.
Por lo tanto, estudiemos las desigualdades f′ (x) $\geq 0$, f′ (x) $\leq$ 0

Calculemos $f'(x)$

$f'(x)=\frac{2.(x^4-1)}{x^3}$ , Hagamos $f'(x)=0$ para determinar los puntos críticos de $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{2.(x^4-1)}{x^3}=0\to x=\pm 1$$

En efecto:

| ***Intervalo*** | $(-\infty,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| ***Punto de prueba*** | x= -2 | x= -1/2 | x= 1/2 | x= 2 |
| ***Signo de f '(x)*** | $f'(-2)<0$ | $f'\left(-\frac{1}{2}\right)>0$ | $f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$ | $f'(2)>0$ |
| ***Conclusión*** | decreciente | creciente | decreciente | creciente |

Luego $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$ y es creciente en los intervalos $(-1,0)$ y $(1,+\infty)$, es decir, **Creciente:** $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ **y Decreciente:** $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.
Por lo tanto, los puntos $(-1, f(-1))=(-1, 2)$ y $(1, f(1))=(1, 2)$ son los puntos mínimos de f(x)

**f) Intervalos de concavidad y convexidad**

Recordemos la definición de Intervalo de Concavidad y Convexidad (**Ver pág.182 del texto UNA Matemática II . Modulo II):** f(x) es convexa en aquellos intervalos en que $f''(x) \geq 0$ y es cóncava para aquellos intervalos en que $f''(x) \leq 0$. Por lo tanto, estudiemos las desigualdades $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$

Calculemos $f''(x)$

$f''(x) = \dfrac{2.(x^4+3)}{x^4}$, Hagamos $f''(x) = 0$ para determinar los puntos de inflexión de $f(x)$:

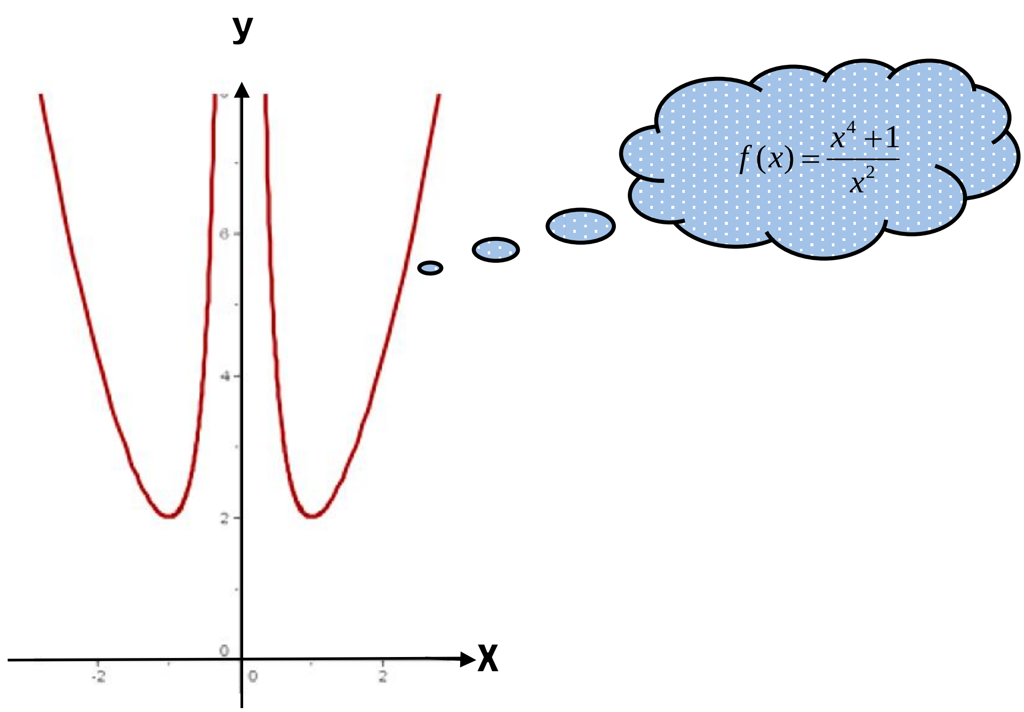
$f''(x) = \dfrac{2.(x^4+3)}{x^4} = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-3}$ , por lo tanto, no hay puntos de inflexión

En efecto:

| ***Intervalo*** | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| ***Punto de prueba*** | x= -1 | x= 1 |
| ***Signo de f ''(x)*** | $f''(-1) > 0$ | $f''(1) > 0$ |
| ***Conclusión*** | Cóncava hacia arriba (convexa) | Cóncava hacia arriba (convexa) |

Luego $f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

**g) Representación grafica de f(x):**



**OBJ 6 PTA 6**

Dada la matriz: A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar **x e y** , reales, para que se verifique que: $A^2$= **x.**A+ **y**.I , siendo I la matriz identidad de orden 2

**RESPUESTA**

Aplicando multiplicación de matrices *(***Ver Pág. 71 del modulo III. Matemática II texto UNA**) tenemos:

$$\mathbf{A^2=A.A} \Rightarrow \mathbf{A^2}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-2 & -1-1 \\ 2+2 & -2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Así:

$$A^2= \mathbf{x}.A+ \mathbf{y}.I\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=x.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & -x \\ 2x & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & -x \\ 2x & x+y \end{pmatrix}$$ , con lo cual se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y= -1 \\ -x= -2 \\ 2x= 4 \end{cases} \quad , \text{ de donde } \boxed{x= 2 \text{ , } y = -1}$$

**OBJ 7 PTA 7**

Usar el método de Gauss-Jordan, para calcular si existe, la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**RESPUESTA**

Para determinar la inversa de una matriz aplicando el método de Gauss-Jordan, se realizan operaciones entre filas **(Ver Págs. 120 y 132 del modulo III. Matemática II texto UNA**) . En efecto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 + f_1]{f_2 \to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\to f_2+2f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$ luego la matriz inversa de A es: $$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

**OBJ 8 PTA 8**

Una encuesta realizada a un grupo de estudiantes de la Universidad Nacional Abierta en relación a cómo tienen acceso a las **tecnologías de la información y la comunicación** (**TICs)** reveló lo siguiente:
a) 125 estudiantes lo hacen desde el computador personal en sus casas
b) 360 estudiantes utilizan las Salas Alma Mater que funcionan en los Centros Locales de la Universidad
c) 75 estudiantes respondieron que lo hacen desde sus casas y desde la Universidad
¿Cuántos fueron los estudiantes entrevistados?

**RESPUESTA**

Denotemos por **A,** el conjunto de los estudiantes que respondieron desde su casa
**B,** el conjunto de los estudiantes que respondieron desde la Universidad

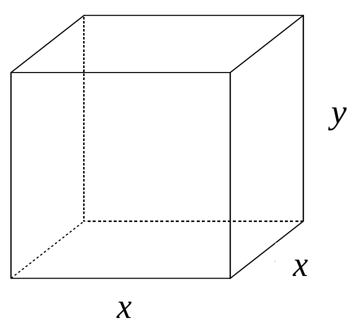
Si A y B son conjuntos finitos, entonces $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ **( Ver Pág. 73 del modulo IV Matemática II (179) pensamiento matemático y modelando con matemática)**

Del enunciado se tiene: $n(A)=125, n(B)=360, n(A\cap B)=75$

Luego, el número total de estudiantes entrevistados es: $n(A\cup B)=125+360-75=\boxed{410}$

**OBJ 9 PTA 9**

Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿Qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?




**RESPUESTA**

Llamamos $x$ al lado de la base , $y$ a la altura del depósito. Así, el volumen es:

$$V = x^2 y = 4000\,\mathrm{dm}^3 \quad \to \quad y = \frac{4000}{x^2}$$

La superficie total del depósito (recordemos que está abierto) será:

$$A = 4xy + x^2 = 4x \cdot \frac{4000}{x^2} + x^2 = \frac{16000}{x} + x^2\,; \quad x > 0$$

Buscamos x para que $A$ sea mínima:

$$A' = \frac{-16000}{x^2} + 2x = \frac{-16000 + 2x^3}{x^2}$$

$$A' = 0 \quad \to \quad -16\,000 + 2x^3 = 0 \quad \to \quad 2x^3 = 16\,000 \quad \to$$

$$\to \quad x^3 = \frac{16000}{2} = 8000 \quad \to \quad x = \sqrt[3]{8000} = 20\ \mathrm{dm}$$

Veamos que es un mínimo:

$$A'' = \frac{32000}{x^3} + 2, \quad A''(20) > 0 \quad \to \quad \text{en } \boxed{x = 20 \text{ hay mínimo}}$$

Por tanto, el lado de la base debe medir $\boxed{x = 20\ \mathrm{dm}}$ y la altura, $\boxed{y = 10\ \mathrm{dm}}$.

## FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

***Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba***

***E.M/11-1***