Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

Matemática II(178-179)
Primera Prueba Parcial
Fecha: 14-05-2011

PREGUNTAS Y RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1

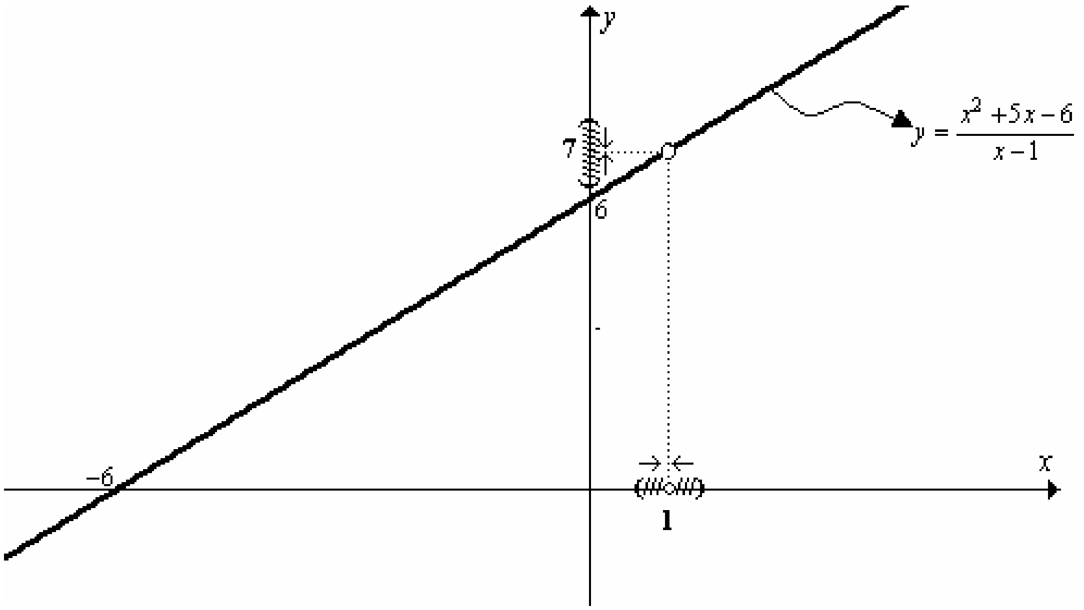
Estudiar y graficar el comportamiento de la función: $f(x)=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$, en las cercanías de x= 1

RESPUESTA

Ciertas funciones de variable real presentan un comportamiento un tanto singular en la cercanía de un punto. Por esta razón, evaluaremos la función dada para ciertos valores de x cada vez más próximos a 1, con lo que podremos por simple inspección concluir y tener una idea del concepto de límite. En efecto, construyamos la siguiente tabla:

x	$y=\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$
0.90	6.90
0.95	6.95
0.99	6.99
…	…
1.01	7.01
1.05	7.05
1.10	7.10

En la tabla de valores se han ubicado unas flechas para dar a entender que tomamos a la variable x aproximándose a 1 en ambas direcciones y se observa que los valores de la variable y se van acercando a 7. Aunque son sólo seis valores, parece ser que esta función se aproxima a tomar el valor de 7 cada vez que la variable independiente x se aproxima a tomar el valor de 1, es decir, que podemos escribir este comportamiento de la siguiente forma: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}=7$. Es importante notar que no es necesario que la función esté definida en el punto de aproximación. Este comportamiento, lo podemos representar gráficamente:



Con lo anterior**,** podemos emitir la siguiente definición: Una función f tiene límite L en un punto x_0 , si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor x_0. Lo que se denota como: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, y en nuestro caso particular , $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 7}$.

OBJ 2 PTA2

Calcular: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2}$

RESPUESTA

Al evaluar el límite obtenemos la indeterminación del tipo 0/0. Este límite puede resolver de dos formas diferentes:

1) Factoricemos la expresión: $x + 5\sqrt{x} - 14 = (\sqrt{x}+7).(\sqrt{x}-2)$ **¿ Por qué ?**

luego, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}+7).\cancel{(\sqrt{x}-2)}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}}$ Simplificando $(\sqrt{x}-2)$

$\lim\limits_{x \to 4} (\sqrt{x}+7) = \sqrt{4} + 7 = 9$

2) Hagamos un cambio de variable: Sea $x = u^2$, de donde $u = \sqrt{x}$, cuando $x \to 4$ tenemos que $u \to 2$, luego:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{u \to 2} \frac{u^2 + 5u - 14}{u - 2}$$ Factoricemos el polinomio ($u^2 + 5u - 14$):

$$\lim_{u \to 2} \frac{(u+7).\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}}$$ Simplificando ($u - 2$)

$$\lim_{u \to 2} (u+7) = 2 + 7 = 9$$

Finalmente:

$$\boxed{\lim_{x \to 8} \frac{x + 5\sqrt{x} - 14}{\sqrt{x} - 2} = 9}$$

OBJ 3 PTA 3

Sea g: R $\to$ R la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x < 0 \\ 2 \quad , & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2}{(x-1)} & , \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función g(x) en x=0 y x= 1

RESPUESTA

Una función g(x): $R \to R$ es continua en $\mathbf{x=x_0}$ si cumple con las siguientes condiciones:

(Pág. 99 Módulo I, Matemática II, UNA):

1) g(x) está definida en $\mathbf{x=x_0}$
2) Existe un número L , tal que $\lim_{x \to x_0}$ g(x)= L
3) g(x) = $\lim_{x \to x_0}$ g(x)= L

Como podemos observar la función g(x) está compuesta de tres tramos. Es útil recordar que los polinomios son continuos en todo **R**, y sus cocientes lo son en todo **R** excepto en los x que anulen el denominador. En el tercer intervalo de la función vemos que para $x=1$ ésta no estaría definida, y por tanto $x=1$ sería un punto de discontinuidad, pero se indica que en este tramo sólo podemos tomar valores mayores que 1.Por otra parte, siempre hay que sospechar de posibles discontinuidades en los puntos que sirven de separación de los tramos; en este caso particular de la función esos puntos son x= 0 y x=1. En otras palabras, los posibles puntos de discontinuidad de la función g(x) son:

- x=0 donde se “separan” en tramos
- x=1, anula el denominador del tercer tramo

Comprobemos si se verifican o no las condiciones de continuidad para cada caso:

En efecto:

Estudiemos la continuidad de g(x) en **x=0**

1) g(0) está definida en **x=0,** g(0)= 2
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2\,,\quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+2) = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$

3) Como g(0)= $\lim\limits_{x\to 0}$ g(x)=2, $\Rightarrow$ la función g(x) es continua en **x=0**

Análogamente estudiemos la continuidad de g(x) en **x=1**

1) g(1) está definida en **x=1,** g(1)= 2
2) Verifiquemos que exista el $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, para ello calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{(x-1)} = +\infty$$ **¿ Por qué ?** , $$\lim_{x\to 1^-} 2 = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existe, con lo cual la función g(x)

<u>NO</u> es continua en x=1

En conclusión, podemos afirmar:

- g(x) es continua para x = 0.
- g(x) presenta una discontinuidad esencial para x = 1
- g(x) es continua para cualquier otro valor x de R

OBJ 4 PTA 4

Calcular la derivada de la función: f(x) $= sen\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right)$

RESPUESTA

Aplicando Propiedades de Derivada y la Regla de la Cadena: (Págs. 53 y 62, Módulo II, Matemática II UNA)se tiene:

$$f'(x) = \left(sen\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right)\right)' = \cos\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right).\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right)'$$

Calculemos:

$$\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right)' = \frac{(x^2.\sqrt{e})'.(\ln x) - x^2.\sqrt{e}.(\ln x)'}{(\ln x)^2} - (\cos^3 x)'$$

Por propiedad de la derivada de un producto y de un cociente (pág. 56 y 57)

$$(x^2.\sqrt{e})' = 2x.\sqrt{e}\,,\ (\ln x)' = \frac{1}{x}\,,\ (\cos^3 x)' = -3.\cos^2 x.senx$$

Por propiedad de la derivada de funciones elementales (pág. 53)

Finalmente:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x^2.\sqrt{e}}{\ln x} - \cos^3 x\right).\left[\frac{2x\sqrt{e}.\ln x - x^2\sqrt{e}.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} + 3\cos^2 x.senx\right]$$

OBJ 5 PTA 5

Dada la función f: R→ R definida por: $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + 1$

a) Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad
b) Representar aproximadamente la gráfica de f(x)

Nota: Para lograr el objetivo Nº 5 se debe responder todos los ítems establecidos en la pregunta

RESPUESTA

$f(x)$ es una función continua en todo su dominio por ser una función polinómica.

a) Calculemos $f'(x)$ y $f''(x)$:

$f'(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$, $f''(x) = x^2 + x - 2$.

Hagamos $f''(x) = 0$ para determinar los puntos de inflexión de $f(x)$:

$f''(x) = x^2 + x - 2 = (x-1).(x+2) = 0$, luego los puntos de inflexión son : $x_1 = 1, x_2 = -2$

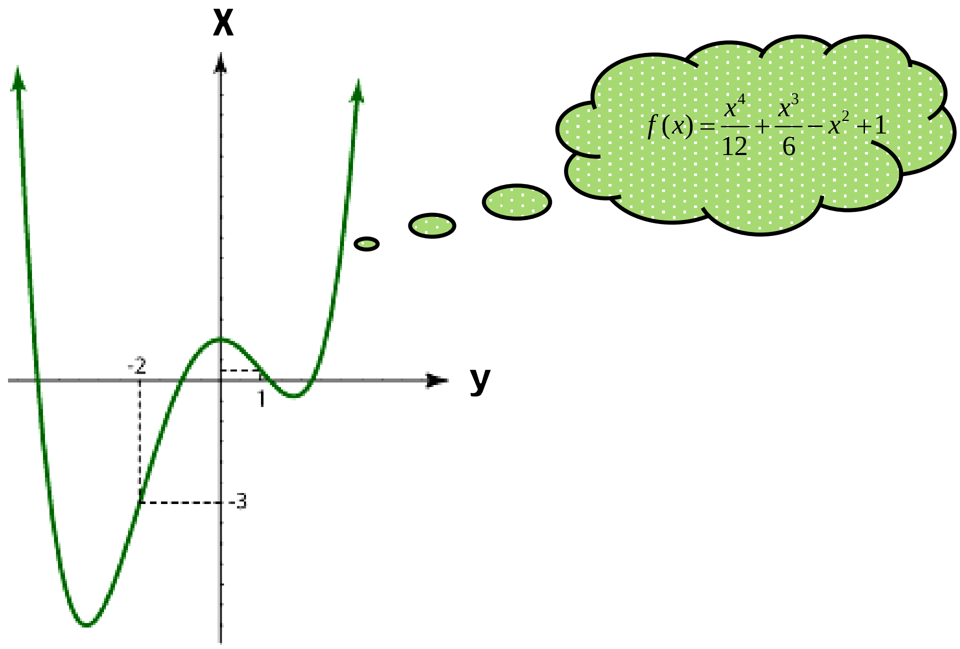
Recordemos la definición de Intervalo de Concavidad y Convexidad (Ver pág.182 Matemática II UNA, Módulo II)**:** f(x) es convexa en aquellos intervalos en que $f''(x) \geq 0$ y es cóncava para aquellos intervalos en que $f''(x) \leq 0$. Por lo tanto, estudiemos las desigualdades $f''(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$

En efecto:

Intervalo	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, \infty)$
Punto de prueba	x= -3	x= 0	x= 2
Signo de f ''(x)	$f''(-3) > 0$	$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba (convexa)	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba (convexa)

Luego $f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$, cóncava en el intervalo $(-2, 1)$. Por lo tanto, los puntos $(-2, f(-2)) = (-2, -3)$ y $(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ son puntos en los que cambia la concavidad y por tanto son puntos de inflexión.

b) La representación gráfica aproximada de la función $f(x)$ es la siguiente:



FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

E.M/11-1