Universidad Nacional Abierta **Cálculo I (700 - 749)**
Vicerrectorado Académico **Fecha: 04/ 10 /2008**
Área de Matemática

MODELO DE RESPUESTAS

OBJ 1 PTA 1 Sean f: IR→IR definida por $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

a. Calcula el valor $L = \lim_{x\to 2} f(x)$.

b. Escribe la definición del significado de $L = \lim_{x\to 2} f(x)$.

c. Determina un valor de δ en la definición dada en la parte **b** para los valores de $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0{,}5$ $\varepsilon = 10^{-8}$.

Nota: Para el logro del objetivo debes responder correctamente todos los apartados anteriores

Respuesta.

a. Evaluando directamente se obtiene que:

$$L = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 - 3x - 1) = 2^2 - 3.2 - 1 = -3.$$

b. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$x \in IR,\ 0 < |x - 2| < \delta, \text{ entonces } |x^2 - 3x - 1 - (-3)| < \varepsilon \qquad [1]$$

c. Tenemos que:

$$|x^2 - 3x - 1 - (-3)| = |x^2 - 3x + 2| = |(x - 1)(x - 2)|$$

Como se debe verificar que $|x - 2| < \delta$, entonces:

$$|(x - 1)(x - 2)| < \delta |x - 1| \qquad [2]$$

Puesto que estamos tomando límite cuando $x\to 2$, podemos suponer que x esta cerca de 2, por ejemplo $x\in[1,3]$, luego el mayor valor que puede tomar $|x - 1|$ es cuando x toma el valor 3 y así:

$$|x - 1| < |3 - 1| = 2 \qquad [3]$$

Utilizando [2] y {3}, resulta:

$$|(x - 1)(x - 2)| < \delta |x - 1| < 2\delta \qquad [\,4\,]$$

Entonces si deseamos que:

$$\varepsilon > |f(x) - (-3)| = |x^2 - 3x - 1 - (-3)|,$$

basta tomar en [4] $2\delta < \varepsilon$, por que de esta manera se garantiza que $|(x - 1)(x - 2)| < \varepsilon$.

Entonces:

si $\varepsilon = 1$, podemos tomar δ tal que: $0 < \delta < 1/2 < 0{,}5$

si $\varepsilon = 0{,}5$, podemos tomar δ tal que: $0 < \delta < 0{,}5/2 < 0{,}25$

si $\varepsilon = 10^{-10}$, podemos tomar δ tal que: $0 < \delta < 10^{-10}/2 < 0{,}00000000005$

OBJ 2 PTA 2

Sea h:IR→IR la función definida por $h(x) = x^6 - 120x^2 - 14x - 1$. Demuestra que h tiene un punto fijo en R, es decir que existe $\alpha \in$IR tal que $\mathbf{h(\alpha) = \alpha}$.

Respuesta

De acuerdo al enunciado del problema debemos hallar $\alpha \in$IR, tal que:

$$\alpha^6 - 120\alpha^2 - 14\alpha - 1 = \alpha$$

o equivalentemente, debemos hallar $\alpha \in$IR, tal que:

$$\alpha^6 - 120\alpha^2 - 15\alpha - 1 = 0.$$

Ahora bien, la función f:IR→IR, definida por $f(x) = x^6 - 120x^2 - 15x - 1$ es continua por ser un polinomio, entonces de acuerdo de acuerdo al Teorema del Valor Medio (p.93 del Texto) o al Teorema de Bolzano (Ejemplo **a** del p. 94 del texto), para hallar un raíz de f debemos asegura que existen puntos x, y ($x \neq y$), tales que $f(x).f(y) < 0$. Esto se pude hacer, tanteado con varios valores de f, como se muestra en la siguiente tabla:

x	0	2	3	4
f(x)	–1	–447	–397	2115

Por lo tanto existe $\alpha \in (0\ ,\ 4)$, tal que $f(\alpha) = 0$ y así existe $\alpha \in$IR, tal que:

$$\alpha^6 - 120\alpha^2 - 14\alpha - 1 = \alpha$$

OBJ 3 PTA 3

Determina si la función f :IR→IR definida por $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{4} + 3\ , & x \leq 4 \\ \sqrt{x}\ , & x > 4 \end{cases}$ es derivable en el punto $x_0 = 4$.

Respuesta

De acuerdo a la definición de derivadas laterales (definiciones 4 p.138 del texto), tenemos:

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{-\frac{x}{4} + 3 - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{4 - x}{4(x - 4)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{h} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{x - 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Como las derivadas laterales de f en $x_0 = 4$ son distintas, entonces la derivada de f no existe en este punto (ver definición de derivada p. 139. del texto).

OBJ 4 PTA 4

Sea h : [0 , +∞) → **R** definida por $h(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x}}$. Defina funciones f,g: [0 ,+∞) → [0 , +∞) tales que h(x) = f(g(x) + f(x)), x.∈[0 , +∞).

Usar la regla de la cadena para calcular h′(x) y calcule h′(1).

<u>Respuesta</u>

Sean f,g: [0 ,+∞) → [0 , +∞) definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ y g(x) = 2x
Luego h : [0 , +∞) → **R** se puede escribir como la composición h(x) = f(g(x) + f(x)), x.∈[0 , +∞)
y usando la regla de la cadena tenemos:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= f'((g(x) + f(x))\,(g(x) + f(x))' \\
&= f'((g(x) + f(x))\,(g'(x) + f'(x)) \\
&= \left(\sqrt{2x + \sqrt{x}}\right)'\left(2x + \sqrt{x}\right)' \\
&= \frac{\left(2x + \sqrt{x}\right)'}{2\sqrt{2x + \sqrt{x}}} = \frac{2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{2x + \sqrt{x}}} = \frac{\dfrac{4\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{2x + \sqrt{x}}} \\
&= \frac{4\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{2x + \sqrt{x}}}
\end{aligned}
$$

FIN DEL MODEO DE RESPUESTAS