Universidad Nacional Abierta
Vicerrectorado Académico
Área De Matemática

MATEMATICAS II (Cód. 178-179)
Cód. Carrera: 610, 611, 612, 613, 508, 280, 236, 126
Fecha: 13/10/2012

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 6 al 9

OBJ 6 PTA 1

Demostrar que $A^2 - A - 2I = 0$, donde A viene dada por la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Por una parte,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$A^2 - A - 2I = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBJ 7 PTA 2

En la semana aniversario en el supermercado “EL 93” , un cliente ha pagado un total de 120 Bs por 12 kg de jamón, 3 kg de sal y 6 kg de plátano. Además, se sabe que 1 kg de plátano cuesta el triple que 1 kg de jamón y que 1 kg de sal cuesta igual que 4 kg de plátano más 4 Kg de jamón.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar el precio en Bs. de cada artículo.

b) Resolver el sistema anterior utilizando el Método de Gauss-Jordan

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

Solución:

a) Sea x = el precio en Bs del kg jamón .
y = el precio en Bs del kg sal .
z = el precio en Bs del kg plátano.

Las ecuaciones que representan el planteamiento dado son las siguientes:

- Por 12 kg de jamón, 3 kg de sal y 6 kg de plátano, el cliente pagó 120 Bs $\Rightarrow 12x + 3y + 6z = 120$

- 1 kg de plátano cuesta el triple que 1 kg de jamón: $\Rightarrow$ z = 3x
- 1 kg de sal cuesta igual que 4 kg de plátano más 4 kg. de jamón:

  $\Rightarrow$ y = 4z+4x

luego, el sistema viene representado por

$$\begin{cases} 12x + 3y + 6z = 120 \\ z = 3x \\ y = 4z + 4x \end{cases} \quad \text{ordenando: } \Rightarrow \quad \begin{cases} 12x + 3y + 6z = 120 \\ -3x + z = 0 \\ -4x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

b) Al aplicar el método de Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones planteado se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 120 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow \frac{1}{3} f_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 40 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 40 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 + 4 f_1]{f_2 \to f_2 + 3 f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 3 & 10 & 120 \\ 0 & 5 & 8 & 160 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2 - f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 2 & -2 & 40 \\ 0 & 5 & 8 & 160 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \to -\frac{1}{2} f_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 5 & 8 & 160 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 5 f_2]{f_1 \to f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 13 & 60 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to -\frac{1}{13} f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 60/13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 + f_3]{f_1 \to f_1 - 4 f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20/13 \\ 0 & 1 & 0 & 320/13 \\ 0 & 0 & 1 & 60/13 \end{pmatrix}$$

es decir, el precio del kg de jamón es de 20/13 ≈ 1,53 Bs, el kg. de sal 320/13 ≈ 24.61 Bs. y el kg de plátano 60/13 ≈ 4.61 Bs.

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 3

Utilizar el método de Inducción para demostrar que $n^3 - n$ es divisible por 3 siempre que n sea un entero positivo

Solución:

En el caso en que n = 1, tenemos $1^3 - 1 = 0$ es divisible por 3.

Para el Paso inductivo suponemos que, en el caso de n = k, nuestra posición es cierta, es decir que

$k^3 - k$ es divisible por 3. HIPOTESIS INDUCTIVA

Ahora bien, trabajaremos el caso en el que n = k+1 y nos apoyaremos en el caso inductivo para lograr la demostración, es decir, queremos demostrar que $(k+1)^3 - (k+1)$ es divisible por 3. ¡ Veámoslo !

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k+1)$$

$$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \text{ Reordenado los términos}$$

Como los dos términos de esta suma son divisibles por 3 (el primero por la suposición del paso de inducción y el segundo porque es tres veces un entero), se tiene que $(k+1)^3 - (k+1)$ es divisible por 3. Esto completa el paso de inducción.

OBJ 9 PTA 4

En un lago artificial se introdujo cierta especie de peces. Un grupo de acuicultores estudia la evolución de esta población, la cual crece bajo la relación:

$$N(t) = N_0 e^{0,4t},$$

donde t es medido en años y N_0 es la población inicial. Determinar para qué valor de **t,** la población inicial se quintuplica.

Solución:

Debemos hallar el valor de **t** para el cual $N(t) = 5N_0$, luego:

$$N_0 e^{0,4t} = 5N_0 \Rightarrow e^{0,4t} = 5 \text{ , aplicando propiedades de ln :}$$

$$Ln\, e^{0,4t} = Ln\, 5$$

Por lo tanto:

$$0,4t = Ln5 \text{ , } \quad t = \frac{Ln\,5}{0.4} \frac{Ln5}{0,2} = 4.023594$$

Luego, t es aproximadamente 4.02, es decir, que en 4 años la población inicial de peces se quintuplicará.

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 3
La ecuación de la demanda para el producto de un fabricante es $10p + x + 0.01\,x^2 = 800$ y la función de costo es $C(x) = 1,000 + 0.01x^2$. Calcular la función utilidad marginal y también evaluar la utilidad marginal para:
a) x = 100 unidades b) $p = 10Bs$ /unidad.

NOTA: Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes

Solución:
La utilidad marginal, es la razón de cambio del valor total de la utilidad obtenida con respecto al número de unidades producidas y vendidas. Es decir, la utilidad aproximada obtenida por la fabricación y venta de una unidad adicional.
Si $U(x)$ es la función de la utilidad total por la producción y venta de *x* unidades $\rightarrow \dfrac{dU}{dx} = U'(x)$ es la función de la utilidad marginal.
La utilidad se calcula restando: (Ingresos) – (Costos), es decir, $U(x) = I(x) - C(x)$, donde el ingreso es $I = px$.
Por lo tanto despejamos *p* de la ecuación de la demanda y lo multiplicamos por *x* para obtener la función ingreso:

$$10p = 800 - x - 0.01\,x^2 \rightarrow p = 80 - 0.1x - 0.001\,x^2$$
$$\rightarrow \mathrm{I}\,(x) = px = 80x - 0.1x^2 - 0.001\,x^3$$

Por otra parte,

$$U(x) = \left(80x - 0.1x^2 - 0.001\,x^3\right) - (1 + 0.01x^2) = -0.001x^3 - 0.11x^2 + 80x - 1$$

Derivando

$$U'(x) = -0.003x^2 - 0.22x + 80$$

Esta es la función utilidad marginal, para evaluarla en *x* = 100 simplemente sustituimos este valor de *x* en dicha función. Para evaluarla en *p* = 10 tenemos que calcular primero cuánto vale *x* para ese valor de *p* en la ecuación de la demanda:

$$10(10) + x + 0.01x^2 = 800.$$

Ordenando la ecuación cuadrática nos queda:

$$0.01x^2 + x - 700 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, empleando para ello la resolverte o cualquier otro método, se obtiene los siguientes valores

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{0.02} \approx 219.25 \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{0.02} \approx -319.25$$

a) $U'(100) = -0.003\,(100)^2 - 0.22(100) + 80 = -30 - 22 + 80 = 28$ bs/ unid adic

b) $U'(200) = -0.003\,(200)^2 - 0.22(200) + 80 = -120 - 44 + 80 = -86$ bs/ unid adic

OBJ 9 PTA 4
Supongamos que son tres los sectores de economía de un país: agrario, industrial y servicios. Según datos del año 1994:
1. Del sector agrario se conocen los siguientes datos estadísticos (en miles de millones): 9 en productos del propio sector, 3 del sector industrial, 1 del sector servicios; siendo la demanda total en el sector 12.
2. El sector industrial empleó: 12 en materias del sector agrario, 31 en los propios productos industriales, y 10 en servicios; la demanda final 47.
3. El sector de servicios demanda del agrario 0, del industrial 6 y del propio 5; siendo el total de la demanda en el sector 31.
a. Construir la tabla input-output
b. Calcular la matriz tecnológica

NOTA: **Para lograr el objetivo debes responder correctamente las dos partes**

Solución:
a.

		comprador			**Demanda final**	**Output total**
		1	**2**	**3**		
Vendedor	**1**	9	12	0	12	33
	2	3	31	6	47	87
	3	1	10	5	31	47

b. De acuerdo a los planteamientos de la pág.88 del texto Matemática II UNA, Módulo IV, la matriz tecnológica es la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 9/33 & 12/87 & 0 \\ 3/33 & 31/87 & 6/47 \\ 1/33 & 10/87 & 5/47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,14 & 0 \\ 0,09 & 0,36 & 0,13 \\ 0,03 & 0,11 & 0,11 \end{pmatrix}$$

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba

.

FIN DEL MODELO