Universidad Nacional Abierta

Vicerrectorado Académico

Área De Matemática

Matemáticas II (178 - 179)

Cód. Carrera: 610, 611, 612, 613, 508, 280, 236, 126

Fecha: 27/04/2013

MODELO DE RESPUESTAS
Objetivos 6 al 9

OBJ 6 PTA 1 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & y \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad C = [2 \quad 1 \quad 3] \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Calcular los valores de x, y, z para que se verifique la siguiente igualdad A + BC = D

Solución:

El producto de BC = $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [2 \quad 1 \quad 3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Por otra parte, como queremos que se satisfaga A + BC = D entonces, despejando se tiene que A = D – BC. Luego,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Al igualar matrices:

$$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & 1 & y \\ 1 & z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 1;\ y = 2\ ;\ z = 0}$$

OBJ 7 PTA 2 Encontrar, en caso de ser posible, la solución al siguiente sistema de ecuaciones aplicando el método de Gauss – Jordan en la resolución del siguiente problema:

$$\begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

Solución:
La matriz ampliada asociada al sistema viene dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 1 & 3 & -1 & -9 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Al realizar las siguientes operaciones por fila $f_2 - f_1$ y $f_3 - f_1$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 12 & -6 & -42 \\ 0 & 8 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

Al simplificar las filas 2 y 3 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Ahora, $f_3 - f_2$ y obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 5 & 33 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos indica que es un sistema compatible determinado (ver pag 144 del módulo III del libro tecto UNA) y que por tanto, la solución es de la forma:

$$z = \lambda \qquad y = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\lambda \qquad x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda$$

MATEMÁTICA 178
CONTADURÍA Y ADMINISTRACIÓN

OBJ 8 PTA 3 Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de bolívares la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el costo por unidad es de 30 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál será ese beneficio?

Solución:
En este caso nos piden que maximicemos la función beneficio, dada ciertas condiciones, por ello, en este tipo de problemas, conseguiré la(s) función(es) condición(es) y luego la función a optimizar.

Función condición

Como la función a optimizar es el beneficio, y ya sabemos que el beneficio viene dado por la diferencia entre el ingreso y el costo, es decir: $B = I - C$

Deberemos construir para éste problema las funciones ingresos y costo. Sabemos que el ingreso es el producto del precio de venta por la cantidad de productos vendidos, si llamamos x al número de céntimos en los que aumenta el precio, se tendrá que el nuevo precio de venta es: $50 + x$ y dado que el problema nos indica que por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día, se tendrá que vender la cantidad de $200 - 2x$, por lo tanto, bajo estas condiciones el ingreso del heladero será:

$$I = (50 + x)(200 - 2x)$$

Por otro lado, se tiene que el gasto de obtener $200 - 2x$ unidades es de 40 céntimos por lo tanto, el costo de esa cantidad vendida es:

$$C(x) = 30(200 - 2x)$$

Función a optimizar

Sabemos que $B = I - C$, sustituyendo las funciones condiciones encontradas, se tiene:

$$B = (50 + x)(200 - 2x) - 30(200 - 2x) = -2x^2 + 160x + 4000$$

A ésta función le buscaremos los puntos críticos, buscamos la primera derivada:

$$B'(x) = -4x^2 + 160$$

Cuyo punto crítico se calculan de manera siguiente:

$$B'(x) = -4x^2 + 160 = 0 \rightarrow x = 40$$

Ahora, debemos verificar que éste punto es un máximo o un mínimo, para ello aplicaremos el criterio de la segunda derivada.

$$B''(x) = -4$$

Al evaluar esta derivada en el punto crítico $x = 40$, se tiene: $B''(x) < 0$. Por tanto, en dicho punto hay un máximo. En consecuencia, el precio de venta que maximiza el beneficio es:

$$50 + x = 50 + 40 = 90,$$

y para este precio se tendrá el beneficio:

$$B(40) = 7200 \text{ céntimos, ó } 72 \text{ bolívares.}$$

OBJ 9 PTA 4 Supóngase una economía formada por 3 industrias con matriz tecnológica

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Los costos unitarios de mano de obra para los productos 1, 2 y 3 son de 20 u.m, 12 u.m y 10 u.m, respectivamente. Además, se desea tener un beneficio unitario para los productos mencionados de 10 u.m, 8 u.m y 5 u.m respectivamente ¿Cuáles deben ser los precios unitarios de cada uno de los productos?

Solución:
Consultar el libro texto UNA, tomo IV, página 93, ejercicio 2.4.3

MATEMÁTICA 179
INGENIERÍA Y MATEMÁTICA

OBJ 8 PTA 3 Demostrar que para cualquier número natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$

Solución:
La propiedad es cierta para $n = 4$, puesto que $2^4 = 16$ y $4! = 24$. De donde se tiene que, $2^4 < 4!$

Al suponer que la propiedad es cierta para $n = k$, es decir:

$$2^k < k! \text{ (hipótesis inductiva)}$$

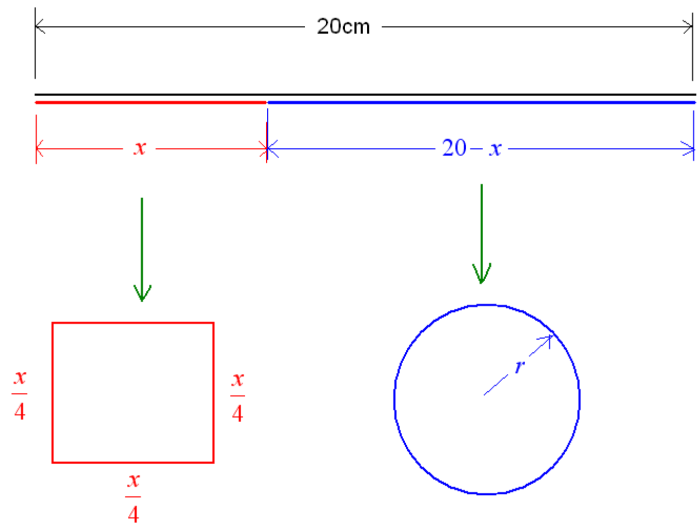
Queremos demostrar que se cumple para $n = k+1$. Puesto que, $2 < k+1$. Para $k > 4$, entonces

$$2^{k+1} - (k+1)! = 2^k\, 2 - (k+1)\, k! < (k+1)\, 2^k - (k+1)k! = (k+1)\underbrace{(2^k - k!)}_{\substack{\text{Hipótesis}\\ \text{inductiva}}} < 0$$

Finalmente, hemos demostrado que para el caso $n = k+1$ también es cierta nuestra proposición.

OBJ 9 PTA 4 Un pedazo de alambre de 20 cm de largo se corta en dos partes; una parte se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma una circunferencia ¿Dónde se deberá hacer el corte para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea un mínimo?

Solución:
En este caso, es importante hacer un dibujo de la situación para entender con mayor claridad el enunciado.



Del primer segmento, x se dobla para formar un cuadrado, por ello el lado de cada cuadrado mide $\frac{x}{4}$ y el resto del alambre, que mide 20 – x se forma una circunferencia, cuyo radio se obtiene de lo siguiente:
La longitud de una circunferencia viene dada por:

$$L = 2\pi r \qquad (1)$$

En este caso, la longitud de la circunferencia es:

$$L = 20 - x$$

Al sustituir esta longitud en 1, se tiene:

$$20 - x = 2\pi r \rightarrow r = \frac{20 - x}{2\pi}$$

Así pues, logramos obtener el radio de la circunferencia formada. Ahora, debemos buscar dos funciones:
la función condición y la función a optimizar, en este caso se pide, minimizar.

<u>Función condición</u>

Observa de la figura anterior que: $r = \frac{20 - x}{2\pi}$

<u>Función a minimizar</u>

Se nos pide minimizar la suma de las áreas de las figuras obtenidas, es decir, el área del cuadrado de lado L es L^2 y el área del círculo es πr^2

La sumatoria de estas áreas nos da:

$$A = \pi r^2 + L^2$$

Al sustituir por los valores de L y r, respectivamente, nos queda:

$$A = \pi\left(\frac{20-x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2$$

Observamos que, tenemos una función CON UNA SOLA VARIABLE. Es por ello, que se utilizó la función condición para lograr tener una función de una sola variable:

$$A = \pi\frac{(20-x)^2}{4\pi^2} + \frac{x^2}{4^2} = \cancel{\pi}\frac{(20-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} + \frac{x^2}{16} = \frac{(20-x)^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16}$$

$$A = \frac{20^2 - 2(20)x + x^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16} = \frac{16\left(400 - 40x + x^2\right) + 4\pi x^2}{64\pi}$$

$$A = \frac{6400 - 640x + 16x^2 + 4\pi x^2}{64\pi} = \frac{(16+4\pi)x^2 - 640x + 6400}{64\pi}$$

$$A = \frac{(16+4\pi)x^2}{64\pi} - \frac{640x}{64\pi} + \frac{6400}{64\pi} = \frac{4(\pi+4)x^2}{64\pi} - \frac{10x}{\pi} + \frac{100}{\pi}$$

$$A = \frac{(\pi+4)}{16\pi}x^2 - \frac{10}{\pi}x + \frac{100}{\pi}$$

Al derivar e igualar a cero para conseguir los puntos críticos, tenemos:

$$A' = \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x - \frac{10}{\pi} = 0 \to \frac{(\pi+4)}{8\pi}x = \frac{10}{\pi} \therefore x = \frac{10\left(8\cancel{\pi}\right)}{\cancel{\pi}(\pi+4)} = \frac{80}{(\pi+4)}$$

Ahora, debemos saber si este punto crítico es un mínimo. Para ello, aplicamos la prueba de la segunda derivada:

$$A' = \frac{2(\pi+4)}{16\pi}x - \frac{10}{\pi} \to A'' = \frac{(\pi+4)}{8\pi}$$

Vemos que la segunda derivada es constante y siempre positiva, por lo tanto la segunda derivada evaluada en cualquier punto es positiva, por consiguiente x = $\frac{80}{(\pi+4)}$ es un mínimo. En consecuencia, al alambre hay que cortarlo en: $\frac{80}{(\pi+4)} \approx 11{,}2$ cm.

FIN DEL MODELO DE RESPUESTA

Este modelo se elaboró para uso de los estudiantes y el mismo debe servir como retroalimentación para la revisión de la prueba